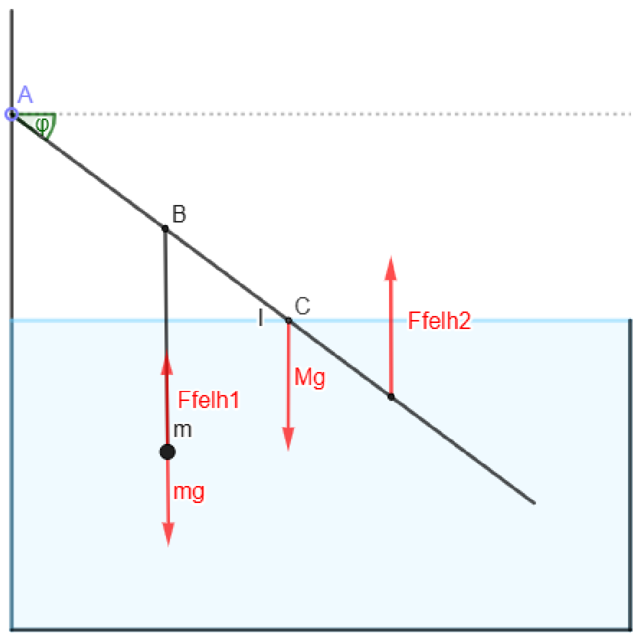
629.

Egy léc A-ban csuklóval van megerősítve, hosszának a feléig ($AC = l/2$) vízbe merül. A léc sűrűsége $\rho_{léc} = 700\,\frac{kg}{m^3}$, keresztmetszetének területe $A = 1\,cm^2 = 10^{-4}\,m^2$. $AB = l/4$-nél, azaz a léc negyedénél hosszú fonálon $m = 60\,g = 0,06\,kg$ tömegű test lóg, mely sűrűsége $\rho_{test} = 3000\,\frac{kg}{m^3}$. Milyen hosszú a léc?

Megoldás



Először vegyük észre, hogy a rendszer nyugalomban van, és mivel a léc az A csukló körül foroghat, a forgatónyomatékok összege erre a pontra 0 kell, hogy legyen, azaz $\sum M = 0$.
Írjuk fel a testre, majd a lécre ható erőket, ezek segítségével a forgatónyomatékokat.
Az erőkarok felírásánál vegyük figyelembe, hogy az erők hatásvonalának távolságát kell venni A-tól, emiatt fonálon lógó testre ható nehézségi erő erőkarja $\frac{l}{4} \cdot \cos\varphi$, mivel a fonál $\frac{l}{4}$-nél van a léchez kötve. Tehát

$$M_{mg} = m \cdot g \cdot \frac{l}{4} \cdot \cos\varphi$$

Hat a testre még a felhajtóerő: (hanyagoljuk el a fonál térfogatát)

$$F_{\text{felh}_1} = V_{\text{test}} \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot g$$

A test térfogata pedig $V_{\text{test}} = \frac{m}{\rho_{\text{test}}} = \frac{0{,}06}{3000} = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$. A felhajtóerő erőkarja szintén $\frac{l}{4} \cdot \cos\varphi$-nél lesz, mivel a felhajtóerő támadáspontja m-ben van, ami pedig $\frac{l}{4}$-nél van a léchez kötözve, így

$$M_{\text{felh}_1} = V_{\text{test}} \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot g \cdot \frac{l}{4} \cdot \cos\varphi$$

Vizsgáljuk meg a lécre ható erőket. Ugyanazok az erők hatnak rá, mint a másik testre, tehát egyrészt a nehézségi erő, ahol a tömeg $m_2 = \rho_{\text{léc}} \cdot A \cdot l = 700 \cdot 10^{-4} \cdot l$. A nehézségi erő támadáspontja a léc tömegközéppontja, ami $\frac{l}{2}$-nél van, emiatt az erőkar $\frac{l}{2} \cdot \cos\varphi$ lesz, tehát

$$M_{m_2 g} = \rho_{\text{léc}} \cdot A \cdot g \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi$$

A felhajtóerő $F_{\text{felh}_2} = V_{\text{benne}} \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot g = \frac{l}{2} \cdot A \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot g$. Az erőkar a vízben lévő tömeg tömegközéppontjánál lesz, azaz $\frac{3}{4}\, l \cdot \cos\varphi$-nél, emiatt

$$M_{\text{felh}_2} = \frac{l}{2} \cdot A \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot g \cdot \frac{3}{4}\, l \cdot \cos\varphi$$

Tudjuk, hogy $\sum M = 0$, ezért

$$M_{mg} - M_{\text{felh}_1} + M_{m_2 g} - M_{\text{felh}_2} = 0$$

$$(g \cdot cos\varphi)\ (m \cdot \frac{l}{4} - V_{\text{test}} \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot \frac{l}{4} + \rho_{\text{léc}} \cdot A \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cdot A \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot \frac{3}{4} \cdot l) = 0$$

Az egyenlet mindkét oldalát el lehet osztani $g \cdot \cos\varphi$-vel, mivel $g \neq 0$ és $\varphi \neq 90^o$, így behelyettesítve:

$$0,06 \cdot \frac{l}{4} - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 1000 \cdot \frac{l}{4} + 700 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{l^2}{2} - 10^{-4} \cdot 1000 \cdot \frac{3}{8} l^2 = 0$$

$$1,5 \cdot 10^{-2} \cdot l - 5 \cdot 10^{-3} \cdot l + 3,5 \cdot 10^{-2} \cdot l^2 - 3,75 \cdot 10^{-2} \cdot l^2 = 0$$

$$1,5 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-3} + 3,5 \cdot 10^{-2} \cdot l - 3,75 \cdot 10^{-2} \cdot l = 0$$

$$10^{-2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot l$$

$$l = 4\ \text{m}$$

A léc 4 m hosszú.

(Készítette Bálint Áron.)