AZ ELLIPSZIS

MERŐLEGES AFFINITÁS, AZ ELLIPSZIS SZÁRMAZTATÁSA ÉS EGYENLETE

949. Adott a merőleges affinitás tengelye és az affinitás aránya: *a)* $\lambda = \frac{1}{2}$; *b)* $\lambda = -2$; *c)* $\lambda = \frac{3}{4}$; *d)* $\lambda = -\frac{5}{4}$. Szerkesszük meg néhány pontnak az affin képét.

950. Bizonyítsuk be, hogy a merőleges affinitásnak a következő tulajdonságai vannak.

a) Egyenes, félegyenes és szakasz affin képe rendre egyenes, félegyenes és szakasz.

b) A tengellyel párhuzamos egyenes affin képe a tengellyel párhuzamos egyenes.

c) A tengellyel nem párhuzamos e egyenes affin képe olyan egyenes, amely az e egyenest a tengelyen metszi.

d) Párhuzamos egyenesek affin képei párhuzamos egyenesek.

e) Középpontosan szimmetrikus alakzat affin képe is középpontosan szimmetrikus alakzat.

951. Adott a merőleges affinitás tengelye és egy megfelelő pontpárja, A és A'. (Sem az A, sem az A' nem illeszkedik az affinitás tengelyére.) Szerkesszük meg

a) adott háromszög;

b) adott négyzet;

c) adott négyszög;

d) adott szabályos hatszög;

e) adott egyenes

affin képét.

952. Legyen a merőleges affinitás tengelye az x tengely és az affinitás aránya *a)* $\frac{1}{3}$; *b)* $-\frac{1}{2}$. Írjuk fel a $2x+y-8=0$ egyenes affin képének az egyenletét.

953. Legyen a merőleges affinitás tengelye az x tengely. A $3x+4y-9=0$ egyenes affin képe a $4x-y-12=0$ egyenes. Számítsuk ki az affinitás arányát.

954. Szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját, ha a főköre és a kisköre:

a) $x^2+y^2=49$, $x^2+y^2=16$;

b) $x^2+y^2=25$, $x^2+y^2=9$.

A merőleges affinitás tengelye az x tengely.

955. Az $x^2+y^2=25$ kör mindegyik pontjának ordinátáját $\frac{4}{5}$ részére zsugorítjuk, illetve 2-szeresére nyújtjuk. Írjuk fel az így kapott ellipszisek főkörének és kiskörének az egyenletét.

956. *a)* Adott a síkban két pont: $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$. Milyen összefüggés áll fenn az adott sík olyan P pontjainak a koordinátái között, amelyekre

$$PF_1+PF_2=12.$$

b) Adott a síkban két pont: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a pontoknak a koordinátái, amelyek az adott síkra illeszkednek, és az F_1 és F_2 pontoktól mért távolságainak összege $2a$ $(2a > 2c)$, kielégítik az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

egyenletet, ahol $b^2=a^2-c^2$.

Igazoljuk, hogy megfordítva, ha valamelyik pont koordinátái kielégítik a felírt egyenletet, akkor erre a pontra teljesül az a feltétel is, hogy az F_1 és F_2 pontoktól mért távolságainak az összege $2a$.

Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletről megállapítottuk, hogy olyan ellipszisnek az egyenlete, amelyet az a sugarú főkörből $\frac{b}{a}$ arányú merőleges affinitással származtathatunk.

A megoldott feladat alapján definiáljuk az ellipszist. (Az adott F_1 és F_2 pontokat az ellipszis fókuszainak nevezzük.)

957. Az ellipszis a síkot két tartományra bontja. A középpontot (a fókuszokat) tartalmazó tartományt nevezzük belső tartománynak, a középpontot (a fókuszokat) nem tartalmazó tartományt nevezzük külső tartománynak. Bizonyítsuk be, hogy a belső tartomány P pontjaira

$$PF_1+PF_2<2a,$$

a külső tartomány P pontjaira

$$PF_1+PF_2>2a,$$

ahol F_1 és F_2 az ellipszis fókuszai és $2a$ a nagytengelye.

958. Írjuk fel az ellipszis középponti egyenletét, ha

a) a nagytengelye 20 cm, a kistengelye 12 cm;

b) a kistengelye 14 cm, a fókuszok távolsága 12 cm;

c) nagytengelye 16 cm, a fókuszok távolsága 10 cm.

Mindegyik esetben szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját.

959. Egy rombusz oldala 5 egység, magassága 4,8 egység. Két szemközti csúcsán olyan ellipszis halad át, amelynek a fókuszai a rombusz másik két csúcsában vannak. Írjuk fel az ellipszis egyenletét, ha átlói a tengelyekre illeszkednek.

960. Írjuk fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek fókuszai $F_1(0;\ c)$ és $F_2(0;\ -c)$, az x tengelyt pedig az $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$ pontokban metszi.

961. Számítsuk ki az ellipszis nagy- és kistengelyét, fókuszainak a koordinátáit, ha az egyenlete:

a) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; *b)* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$;

c) $3x^2+5y^2=15$; *d)* $2x^2+y^2=4$; *e)* $4x^2+2y^2=9$.

Szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját.

962. Írjuk fel az ellipszis egyenletét, ha

a) a nagytengelye 26 egység, fókuszai a $(-10;\ 0)$ és $(14;\ 0)$ pontok;

b) a középpontja a $(-3;\ 4)$ pont, a nagytengelye 10 egység, kistengelye 8 egység, és a nagytengelye párhuzamos az x tengellyel;

c) a középpontja a $(4; -5)$ pont, a nagytengelye 8 egység, egyik fókusza az $(1; -5)$ pont;
d) a tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, az x tengelyt a $(7; 0)$, az y tengelyt a $(0; 4)$ pontban érinti.

963. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott ellipszisek középpontjának és fókuszainak a koordinátáit:

a) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$; *b)* $x^2+3y^2+6x+6=0$;

c) $x^2+2y^2-2x-4y=1$; *d)* $4x^2+5y^2+16x-20y+31=0$;

e) $x^2+2y^2-10x+12y+43=0$.

964. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipszis 0, $\pm\frac{1}{2}$, ±1, ±2 abszcisszájú pontjainak az ordinátáját.

965. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis fókuszán keresztül húrt fektetünk, amely merőleges a nagytengelyre. Számítsuk ki a húr hosszát.

966. Határozzuk meg a $4x^2+5y^2=120$ ellipszisnek azt a pontját, amely a kistengelyétől 5 egység távolságra van.

967. Az ellipszis tengelyei 10 és 6 cm hosszúak. Mekkora szöget zárnak be a 3 cm-es abszcisszájú ponthoz vezető rádiuszvektorok? (Az ellipszis egy pontját a fókuszokkal összekötő szakaszokat a ponthoz tartozó rádiuszvektoroknak nevezzük.)

968. Állapítsuk meg a $(8; 2)$; $(-4; 3)$; $\left(2; -\frac{3}{2}\sqrt{15}\right)$ pontok helyzetét az $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$ ellipszisre vonatkozólag.

969. Mi az egyenlete annak az ellipszisnek, amelynek nagytengelye az x tengelyre, kistengelye pedig az y tengelyre illeszkedik, továbbá
a) nagytengelyének a hossza 12 cm, és az ellipszis áthalad a $(3; 4)$ ponton;
b) kistengelyének hossza 6 cm, és az ellipszis áthalad a $(-4; 1)$ ponton;
c) fókusztávolsága $\frac{4\sqrt{33}}{3}$, és az ellipszis áthalad a $(2; 1)$ ponton;
d) áthalad a $(4; 3)$ és $(6; 2)$ pontokon;
e) áthalad az $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\sqrt{5}\right)$ pontokon;
f) áthalad a $(\sqrt{3}; -2)$ és $(-2\sqrt{3}; 1)$ pontokon?

970. Számítsuk ki a $3x^2+8y^2=120$ ellipszis $x=4$ abszcisszájú pontjához vezető rádiuszvektorok hajlásszögét és hosszúságát.

971. A mozgó pont helyét a derékszögű koordináta-rendszerben az

$$x=4\cos 2t \quad \text{és} \quad y=3\sin 2t$$

koordináták adják meg, ahol t az idő. Milyen vonalat ír le a pont?

972. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis tengelyei által meghatározott pozitív sík-negyedben határozzuk meg az ellipszisnek azt a pontját, amely a harmadik negyedben fekvő tengelyvégpontokkal együtt legnagyobb területű háromszöget határoz meg.

METSZÉSI FELADATOK

973. Hol metszi

a) az $y = 2x$ egyenes az $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3} = 1$ ellipszist;

b) a $2x-y-9 = 0$ egyenes az $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12} = 1$ ellipszist;

c) a $7x+3y = 26$ egyenes a $7x^2+21y^2 = 364$ ellipszist;

d) a $3x-4y-40 = 0$ egyenes a $9x^2+16y^2 = 144$ ellipszist?

974. Milyen hosszú húrt vág ki

a) az $y = mx$ egyenesből az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis;

b) az $\frac{x}{a}+\frac{x}{b} = 1$ egyenesből az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis?

975. Milyen hosszú az $5x^2+9y^2 = 161$ ellipszisnek az $x+y = 7$ egyenesre illeszkedő húrja?

976. Az $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9} = 1$ ellipszisbe olyan szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa a nagytengely jobb oldali végpontja; ezzel szemközti oldala pedig merőleges a nagytengelyre. Számítsuk ki a háromszög másik két csúcsának a koordinátáit.

977. Milyen hosszú az $x^2+2y^2 = 34$ ellipszis 4 abszcisszájú pontján áthaladó átmérő? (Az ellipszis középpontján áthaladó húrt az ellipszis átmérőjének mondjuk.)

978. Keressük meg az ellipszis mindkét tengelyén azokat a pontokat, amelyekből mint középpontokból köröket rajzolva, azok áthaladnak az $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36} = 1$ ellipszis és a $3x-10y+60 = 0$ egyenes metszéspontján.

979. Rajzoljunk az $\frac{x^2}{100}+\frac{y^3}{36} = 1$ ellipszis középpontja körül 15 egység sugárral kört. Húzzuk meg a körnek azt a sugarát, amelynek irányszöge 30°. Számítsuk ki a sugár azon részének a hosszúságát, amely a kör és az ellipszis közé esik.

980. Milyen hosszú a középponti helyzetű ellipszisnek az az átmérője, amely a koordinátatengelyek valamelyik szögfelezőjére illeszkedik?

981. Számítsuk ki a középponti helyzetű ellipszis egyik fókuszán és a kistengely végpontján áthaladó húr hosszát.

982. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5} = 1$ ellipszis és az $y = x+l$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit. l milyen értéke mellett van 2, 1, 0 megoldás?

983. Mekkora az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszisbe írt négyzet oldala?

(Ellipszisbe írt négyzeten, általában sokszögön olyan négyzetet, sokszöget értünk, amelynek csúcsai az ellipszisre illeszkednek.)

984. Az $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipszisbe olyan téglalapot írunk, amelynek területe a kistengely négyzete. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

985. Határozzuk meg a $9x^2+16y^2=144$ ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez vezető egyik rádiuszvektor hossza 5 egység.

986. Adjuk meg az $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ ellipszisnek azokat a pontjait, amelyek a jobb oldali fókusztól négyszer akkora távolságra vannak, mint a bal oldali fókusztól.

987. Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisnek azokat a pontjait, amelyek a középponttól és az egyik fókusztól egyenlő távolságra vannak.

988. Határozzuk meg az $x^2+6y^2=2$ ellipszis olyan átmérőinek az egyenletét, amelyeknek a hossza 2 egység.

989. Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez vezető rádiuszvektorok szorzata a kistengely felének a négyzetével egyenlő.

990. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipszis olyan húrjának az egyenletét, amely áthalad a $P(1;1)$ ponton, és amelyet a P pont felez.

991. Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez vezető rádiuszvektorok merőlegesek egymásra. Hány megoldás van?

992. Számítsuk ki az $x^2+9y^2=45$ és az $x^2+9y^2-6x=27$ ellipszisek metszéspontjait.

993. Két ellipszis középpontja egybeesik a koordináta-rendszer kezdőpontjával; az egyiknek a nagytengelye az x tengelyre, a másiké az y tengelyre illeszkedik. Az x tengelyre illeszkedő fél nagytengely $a_1=8$, az y tengelyre illeszkedő fél nagytengely $a_2=6$. A hozzájuk tartozó fél kistengelyek $b_1=4$ és $b_2=3$. Számítsuk ki az ellipszisek metszéspontjait.

994. Bizonyítsuk be, hogy az ellipszisben bármelyik két egymásra merőleges átmérő hossza reciprok értékeinek a négyzetösszege ugyanakkora.

995. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis mindegyik negyedében azt a pontot, amelynek ordinátája félakkora, mint az illető pontnak a kistengelynek hozzá közelebb eső végpontjától mért távolsága.

996. Határozzuk meg azt a legnagyobb sugarú kört, amelynek a középpontja az ellipszis kistengelyének egyik végpontja, és még van közös pontja az ellipszissel.

997. Adott az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis. Írjunk bele olyan háromszögeket, amelyeknek egyik csúcsa a kistengely végpontja, a szemközti oldal pedig párhuzamos a nagytengellyel. Melyik közülük a legnagyobb területű?

AZ ELLIPSZIS ÉRINTŐJE

998. Vizsgáljuk meg a $4x-5y-40=0$ egyenes és az $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ ellipszis viszonylagos helyzetét.

999. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $Ax+By+C=0$ egyenes érintse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszist. (Azt az egyenest, amelynek csak egy közös pontja van az ellipszissel, és az ellipszis síkjában van, az ellipszis érintőjének mondjuk.)

1000. Igazoljuk, hogy az $x^2+y^2=a^2$ kör és az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis közös abszcisszájú pontjaiban húzott érintők az x tengelyen metszik egymást.

1001. Igazoljuk, hogy az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis $(x_1;\ y_1)$ pontjához húzható érintő egyenlete $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. Írjuk fel az $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ellipszis $(2;\ -3)$ pontjában az ellipszishez húzható érintő egyenletét.

1002. Írjuk fel az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis $x=\pm c$ abszcisszájú pontjaiban az ellipszishez húzható érintők egyenletét. Határozzuk meg az érintők által meghatározott négyszög kerületét és területét.

1003. Az $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipszis jobb oldali fókuszában megrajzoljuk a pozitív ordinátát, és ennek végpontjában az ellipszishez érintőt szerkesztünk. Mekkora az érintő és a tengelyek által bezárt háromszög területe?

1004. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis $(x_1;\ y_1)$ pontjában merőlegest rajzolunk ebben a pontban az ellipszishez húzott érintőre. Mely pontokban metszi az így kapott egyenes a koordinátatengelyeket?

1005. Határozzuk meg az $x^2+4y^2=20$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek párhuzamosak az $y=-x$ egyenessel.

1006. Írjuk fel az $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek merőlegesek a $13x+12y-115=0$ egyenesre.

1007. Határozzuk meg annak a négyzetnek csúcsait, amelyeknek az átlói a koordináta-rendszer tengelyein vannak, és az oldalai érintik a $4x^2+9y^2=36$ ellipszist. Mekkora az érintési pontok által meghatározott négyszög területe?

1008. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez húzott érintőknek legrövidebb a koordinátatengelyek közé eső darabja.

1009. Írjuk fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek a tengelyei a koordináta-rendszer tengelyeire illeszkednek, és áthalad az $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$; $\left(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontokon. Határozzuk meg a $(4;\ 4)$ pontból az ellipszishez húzható érintők egyenletét.

1010. Írjuk fel a $\left(\frac{3}{5};\ \frac{14}{5}\right)$ pontból a $4x^2+9y^2 = 36$ ellipszishez húzott érintők egyenletét.

1011. A $(10;\ -8)$ pontból érintőket rajzolunk az $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$ ellipszishez. Határozzuk meg az érintési pontok által meghatározott húr egyenletét.

1012. A $(0;\ a)$ pontból érintőket húzunk az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszishez $(a > b)$. Számítsuk ki az érintőszakaszok hosszát.

1013. Számítsuk ki annak a négyszögnek a területét, amelyet a $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ ellipszisen kívül fekvő $(p;\ q)$ pont, e pontból az ellipszishez húzható érintők érintési pontjai és az origó határoznak meg.

1014. Írjuk fel annak a középponti helyzetű ellipszisnek az egyenletét, amely áthalad a $\left(3;\ \frac{12}{5}\right)$ ponton, és érinti a $4x+5y = 25$ egyenest.

1015. Írjuk fel annak az ellipszisnek egyenletét, amelynek a fókuszai a $(-3;\ 0)$ és a $(3;\ 0)$ pontok, és érinti az $x-y-5 = 0$ egyenest.

1016. Írjuk fel annak a középponti helyzetű ellipszisnek az egyenletét, amely érinti a $4x+5y = 25$ és a $9x+20y = 75$ egyeneseket.

1017. Határozzuk meg annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek a fókuszai az $x^2+y^2 = r^2$ kör $(-r;\ 0)$ és $(r;\ 0)$ pontjaiban vannak, és a kört 30°-os szögben metszi.

1018. Határozzuk meg a $16x^2+25y^2 = 400$ ellipszis és az $x^2+y^2 = 20$ kör közös érintőinek az egyenletét.

1019. Írjuk fel a $3x^2+8y^2 = 45$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek a középponttól 3 egység távolságra vannak.

1020. Határozzuk meg a $4x^2+5y^2 = 20$ és az $5x^2+4y^2 = 20$ ellipszisek közös érintőinek az egyenletét.

1021. Bizonyítsuk be, hogy az ellipszis P pontjához tartozó érintő a ponthoz vezető rádiuszvektorok egyenesével egyenlő szögeket zár be.

1022. Feltételezve azt, hogy egy tükröző felület keresztmetszete ellipszis, igazoljuk, hogy az ellipszis egyik fókuszából kiinduló fénysugarak egyszeri visszaverődés után a másik fókuszon haladnak át.

1023. Jelöljük az ellipszis nagytengelyén elhelyezkedő tengelypontokat A-val és B-vel, a hozzájuk tartozó érintőket rendre e_1-gyel és e_2-vel. Ezután jelöljünk ki az ellipszisen egy tetszőleges, de A-tól és B-től különböző P pontot, és rajzoljuk meg a P ponthoz tartozó e érintőt is. Az e és e_1 metszéspontját jelöljük A_1-gyel, az e és e_2 metszéspontját jelöljük B_1-gyel. Bizonyítsuk be, hogy

a) az A_1B_1 szakasz a fókuszokból derékszög alatt látszik;
b) az $AA_1 \cdot BB_1$ szorzat állandó.

1024. Bizonyítsuk be, hogy ha az ellipszis egyik fókuszát az ellipszis érintőire tükrözzük, akkor a tükörképek a másik fókusz körül a nagytengellyel, mint sugárral írt körre illeszkednek. (Az ellipszis egyik fókusza körül a nagytengellyel mint sugárral írt kört az ellipszis vezérkörének nevezzük.)

1025. Bizonyítsuk be, hogy ha az ellipszis egyik fókuszából az ellipszis érintőire merőlegeseket állítunk, akkor a merőlegesek talppontjai az ellipszis főkörére illeszkednek.

1026. Bizonyítsuk be, hogy a fókuszoknak az ellipszis érintőjétől mért távolságainak szorzata nem függ az érintő megválasztásától.

1027. Jelöljük az ellipszis középpontját O-val, a nagytengelyen elhelyezkedő ellipszispontokat A-val és B-vel. Az ellipszis A-tól különböző P pontjához tartozó érintője az A pontjához tartozó érintőjét a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BP \| OQ$.

SZERKESZTÉSI FELADATOK

1028. Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza. Szerkesszük meg az ellipszis egyik pontját és ehhez a ponthoz tartozó érintőjét.

1029. Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza. Szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját. Az ellipszis síkjában felvett külső pontból szerkesszünk az ellipszishez érintőt.

1030. Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza és az ellipszis síkjában egy e egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis és az egyenes metszéspontjait.

1031. Az ellipszist ismertnek tekintjük, ha ismerjük nagytengelyének a hosszát és a fókuszainak a távolságát. Ezt szem előtt tartva, szerkesszünk ellipszist, ha adott

a) a nagytengelyének és a kistengelyének a hossza;
b) a kistengelyének a hossza és a fókuszainak a távolsága;
c) a két fókusza és egy pontja;
d) az egyik fókusza, két pontja és a nagytengelyének a hossza;
e) a két fókusza és az egyik érintője;
f) az egyik fókusza, az egyik érintője és a középpontja;
g) az egyik fókusza, két érintője és a nagytengelyének az iránya;
h) az egyik fókusza, két érintője és a nagytengelyének a hossza;
i) az egyik fókusza, az egyik érintője és a nagytengelyének egyik végpontja;
j) a nagytengelyének helyzete és hossza, valamint az egyik érintője;
k) az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a fókuszainak a távolsága;
l) az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a nagytengelyének az iránya;
m) az egyik fókusza, két érintője és az egyiken az érintési pont;
n) az egyik fókusza, az egyik érintője, a nagytengelyének a hossza és a fókuszainak távolsága;
o) az egyik fókusza, az egyik érintője, egyik pontja és a nagytengelyének a hossza;

p) az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a nagytengelyének a hossza;
r) az egyik fókusza, az egyik pontja, az egyik érintője az érintési ponttal;
s) az egyik fókusza, az egyik pontja és a kistengelyének az egyik végpontja;
t) a nagytengelyének két végpontja és egy pontja;
u) két érintője, a középpontja és a nagytengelyének a hossza;
v) az egyik fókusza és három érintője.

1032. Szerkesszünk adott ellipszis köré olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egyik csúcsa a kistengely egyenesére illeszkedik.

A HIPERBOLA

A HIPERBOLA EGYENLETE

1033. Hol helyezkednek el azok a P pontok a síkban, amelyekre

$$|PF_1-PF_2|=6,$$

ahol $F_1(-3;\ -3)$ és $F_2(3;\ 3)$. Szerkesszünk néhány, a feltételnek megfelelő pontot.

1034. Határozzuk meg, hogy *a)* az $xy=18$; *b)* a $2xy-9=0$ hiperbola mely pontjai vannak legközelebb az origóhoz? Írjuk fel a hiperbola valós és képzetes tengelyegyenesének az egyenletét.

1035. Írjuk fel *a)* az $xy=2$; *b)* az $xy=4$ hiperbola egyenletét abban a koordináta-rendszerben, amelynek az x tengelye a hiperbola valós tengelyegyenese.

1036. Adott egy sík és a síkban két pont: $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$. Bizonyítsuk be, hogy azoknak az adott síkra illeszkedő P pontoknak a koordinátái, amelyekre

$$(*)\quad |PF_1-PF_2|=8,$$

kielégítik az

$$(**)\quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

egyenletet. Bizonyítsuk be, hogy megfordítva, azok a pontok, amelyeknek koordinátái kielégítik a (**) egyenletet, eleget tesznek a (*) feltételnek is.

1037. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola középponti egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(A $2a$ hosszúságú szakaszt, amely a valós tengelyegyenesen elhelyezkedő két hiperbolapontot köti össze, valós tengelyszakasznak vagy valós tengelynek nevezzük. Jelöljük a fókuszokat összekötő szakasz hosszát $2c$-vel. Ekkor $b^2=c^2-a^2$. A $2b$ hosszúságú szakaszt, amely a fókuszok távolságát merőlegesen felező egyenesnek, a képzetes tengelyegyenesnek a középpontra szimmetrikus szakasza, képzetes tengelyszakasznak vagy képzetes tengelynek nevezzük.)

1038. Írjuk fel a hiperbola középponti egyenletét, ha
a) a valós tengelye 8 cm, a képzetes tengelye 6 cm;
b) a valós tengelye 12 cm, a fókuszok távolsága 14 cm;
c) a képzetes tengelye 8 cm, a fókuszok távolsága 12 cm.
Szerkesszük meg a hiperbola néhány pontját. (A valós tengely legyen az x tengely, a képzetes tengelyegyenes az y tengely.)

1039. Számítsuk ki a hiperbola valós és képzetes tengelyének a hosszúságát és a fókuszok távolságát, ha az egyenlete:

a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$;
b) $\frac{x^2}{9}-4y^2=1$;
c) $36x^2-64y^2=2304$;
d) $4x^2-8y^2=32$;
e) $x^2-4y^2=144$.

Szerkesszük meg a hiperbola néhány pontját.

1040. A hiperbola a síkot két tartományra osztja. A fókuszokat tartalmazó tartományt belső, a fókuszokat nem tartalmazó tartományt külső tartománynak nevezzük. Igazoljuk, hogy ha a hiperbola fókuszai F_1 és F_2 és a valós tengelye $2a$, akkor a belső tartomány P pontjaira

$$|PF_1-PF_2|>2a,$$

és a külső tartomány P pontjaira

$$|PF_1-PF_2|<2a.$$

Határozzuk meg, hogy a $(2;4)$; $(5;8)$; $(-6;1)$ pontok a $36x^2-9y^2=324$ hiperbolához viszonyítva hol helyezkednek el.

1041. Mi az egyenlete annak a hiperbolának, amelynek a valós tengelyegyenese az x tengely, a képzetes tengelyegyenese az y tengely, továbbá
a) a valós tengelye 6 egység és a hiperbola áthalad az $(5;8)$ ponton;
b) a fókuszainak a távolsága 10 egység és a hiperbola áthalad az $\left(5;-\frac{9}{4}\right)$ ponton;
c) a képzetes tengelye 8 egység, és a hiperbola áthalad a $(-6;4)$ ponton;
d) a hiperbola áthalad a $(6;-1)$ és a $(-8;2\sqrt{2})$ pontokon.

1042. Határozzuk meg annak a hiperbolának az egyenletét
a) amelynek a középpontja a $(-4;-3)$ pont, a valós tengelye 12, a képzetes tengelye 8 egység, és a valós tengelye párhuzamos az x tengellyel;
b) amelynek a valós tengelye 24 egység, a fókuszai
$F_1(-10;2)$; $F_2(16;2)$;
c) amelynek a képzetes tengelye 10 egység, a fókuszai
$F_1(4;4)$; $F_2(-8;4)$.

1043. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott hiperbolák középpontjának és a fókuszainak koordinátáit:

a) $\dfrac{(x+3)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{8}=1$;

b) $\dfrac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{1}-\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$;

c) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;
d) $5x^2-4y^2-20x-24y-36=0$.

1044. A hiperbola fókuszai egybeesnek az $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ellipszis fókuszaival. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha a valós tengelye 6 egység.

1045. Számítsuk ki az $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{24}=1$ hiperbola $x=10$ abszcisszájú pontjához tartozó rádiuszvektorok hosszát és hajlásszögét.

1046. Határozzuk meg a $(4;\ 6)$ ponton áthaladó, és az $x^2-y^2=8$ hiperbolával közös fókuszú ellipszis egyenletét.

1047. Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek a fókusza azonos az $x^2-y^2=8$ hiperboláéval, és áthalad a $(-5;\ 3)$ ponton.

METSZÉSI FELADATOK

1048. Határozzuk meg

a) a $2x-y-10=0$ egyenes és az $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$ hiperbola közös pontjainak a számát;

b) a $4x-3y-16=0$ egyenes és az $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ hiperbola közös pontjainak a számát.

1049. Határozzuk meg az $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ hiperbola és az $y=\dfrac{1}{2}x-2$ egyenes közös pontjainak a számát. Mekkora az egyenesnek a két hiperbolaág közé eső szakasza?

1050. Szerkesszük meg az $x^2-4y^2=4$ hiperbolának a $P(3;\ -1)$ ponton áthaladó olyan húrját, amelyet a P pont megfelez.

1051. Milyen hosszú húrt vág ki az $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola az $x-2y-1=0$ egyenesből?

1052. Az $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ hiperbola valós tengelyével párhuzamost húzunk tőle d távolságban. Mekkora szakaszt vág ki a hiperbola az egyenesből?

1053. Számítsuk ki az $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola és az $y=mx$ egyenes metszéspontjának koordinátáit.

1054. Keressük meg az $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{289}=1$ hiperbolának azt a pontját, amelyet a $\mathbf{v}(1; 1)$ irányvektorú szakasz köt össze a kezdőponttal.

1055. Milyen hosszú az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolának az a húrja, amely az egyik fókuszán és a képzetes tengely egyik végpontján áthaladó egyenesre illeszkedik?

1056. A $9x^2-16y^2=576$ hiperbola az origón áthaladó valamelyik egyenesből 20 egység hosszúságú szakaszt vág ki. Határozzuk meg az egyenes egyik irányvektorát.

1057. Számítsuk ki az $x^2+y^2=25$ kör és a $9x^2-4y^2=108$ hiperbola metszéspontjai által meghatározott négyszög területét.

1058. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolának azokat a pontjait, amelyek a bal oldali fókusztól 7 egység távolságra vannak.

1059. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolának azt a pontját,

a) amelyhez tartozó rádiuszvektorok egymásra merőlegesek;

b) amely a bal oldali fókusztól kétszer akkora távolságra van, mint a jobb oldalitól.

1060. Egy hiperbola egyenlete $9x^2-16y^2=144$. Az $x^2+y^2=r^2$ kör úgy metszi a hiperbolát, hogy a metszéspontok által meghatározott téglalap területe egyenlő azon téglalap területének a négyszeresével, amelynek oldalai a hiperbola tengelyei. Mekkora a kör sugara?

1061. Egy téglalap csúcsai a $9x^2-16y^2=144$ hiperbolára illeszkednek. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak a koordinátáit, ha a területe a valós tengellyel szerkesztett négyzet területével egyenlő.

1062. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{400}=1$ hiperbolának azt a pontját, amelyhez tartozó rádiuszvektorok összege 130 egység.

1063. Egy hangforrás helyét akarják meghatározni. Ezért három megfigyelő (A, B és C) egy egyenesen úgy helyezkedik el, hogy a koordinátáik: $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ és $C(6; 0)$. (A távolság egységét km-ben adták meg.) A B figyelőhöz a hangforrásból 3 másodperccel később érkezik meg ugyanaz a hang, mint a C figyelőhöz. Az A figyelő 9 másodperccel később hallja ugyanazt a hangot, mint a B. A hang terjedési sebessége $\frac{1}{3}$ km/s. Határozzuk meg a hangforrás helyét.

A HIPERBOLA ASZIMPTOTÁI ÉS ÉRINTŐJE

1064. Írjuk fel a $4x^2-9y^2=36$ hiperbola aszimptotáinak az egyenletét.

1065. Mekkora szöget zárnak be az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5{,}76}=1$ hiperbola aszimptotái?

1066. Írjuk fel a középponti helyzetű hiperbola egyenletét, ha aszimptotáinak a hajlásszöge 120°.

1067. Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek aszimptotái a koordinátatengelyek, és áthalad a $(-4; 2)$ ponton.

1068. Igazoljuk, hogy a derékszögű hiperbola felezi a fókuszainak az aszimptotáktól mért távolságát. (Derékszögűnek mondjuk a hiperbolát akkor, ha az aszimptotái merőlegesek egymásra. A derékszögű hiperbola valós és képzetes tengelye egyenlő.

1069. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola egyik fókuszából az egyik aszimptotára húzott merőleges talppontjának a kezdőponttól mért távolságát.

1070. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola bármely pontjának az aszimptotáktól mért távolságai 0-tól különböző állandó értéket adnak szorzatul.

1071. Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola P pontján át állítsunk merőleges egyenest az x tengelyre. Bizonyítsuk be, hogy ennek az egyenesnek az aszimptoták közötti szakaszát a P pont olyan két részre osztja, amelyeknek a mértani közepe b.

1072. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola fókuszaiból az aszimptotákra húzott merőlegesek talppontjai a hiperbola középpontja köré a valós féltengelylyel rajzolt körön vannak.

1073. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola egyik fókuszának az aszimptotákra vonatkozó tükörképei a másik fókusz köré a valós tengellyel rajzolt körön vannak.

1074. Az $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolán keressük meg azt a pontot, amely az egyik aszimptotához háromszor közelebb van, mint a másikhoz.

1075. Bizonyítsuk be, hogy az aszimptotákkal párhuzamos egyenesek a hiperbolát egy pontban metszik.

1076. Igazoljuk, hogy ha egy egyenes két pontban metszi a hiperbolát, akkor ennek az egyenesnek az aszimptotáktól a hiperboláig terjedő szakaszai egyenlőek.

1077. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintőjének az érintési pontja felezi az érintőből az aszimptoták által kivágott szakaszt.

1078. Szerkesszük meg az $xy=a$, illetve az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola egyik pontját (a, b adott szakaszok), ezután szerkesszük meg az adott ponthoz tartozó hiperbolaérintőt.

1079. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintője és aszimptotái által határolt háromszög területe nem függ az érintő megválasztásától.

1080. Vizsgáljuk meg

a) az $x^2-4y^2=12$ hiperbola és az $x-y-3=0$ egyenes;
b) a $9x^2-16y^2=144$ hiperbola és az $x-2y+1=0$ egyenes;
c) a $16x^2-25y^2=400$ hiperbola és a $7x-5y=0$ egyenes viszonylagos helyzetét.

1081. m milyen értékei mellett lesz 2, 1, illetve 0 közös pontja az $y=\frac{5}{2}x+m$ egyenesnek és az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ hiperbolának?

1082. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $Ax+By+C=0$ egyenes érintse az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolát? (Azt az egyenest, amelynek egy közös pontja van a hiperbolával, és a hiperbola síkjában van, a hiperbola érintőjének mondjuk.)

1083. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $P(x_1;\ y_1)$ pontjához tartozó érintő egyenlete $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

1084. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintője felezi az érintési ponthoz tartozó rádiuszvektorok hajlásszögét. Hogyan alkalmazhatjuk ezt a tételt a hiperbola adott pontjához tartozó érintő megszerkesztésére?

1085. Feltételezve azt, hogy egy tükröző felület keresztmetszete hiperbola, igazoljuk, hogy az egyik fókusz képzetes képe a hiperbola másik fókusza.

1086. Írjuk fel a $4x^2-5y^2=20$ hiperbola $(5;\ -4)$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

1087. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha aszimptotáinak az egyenlete $y=\pm\frac{1}{2}x$ és egyik érintőjének az egyenlete $5x-6y-8=0$.

1088. Mi az egyenlete annak a hiperbolának, amely az $x-y-2=0$ egyenest a $P(4;\ 2)$ pontjában érinti, és tengelyei a koordinátatengelyekre illeszkednek?

1089. Írjuk fel a középponti helyzetű hiperbola egyenletét, ha két érintője: $5x-6y-16=0$; $13x-10y-48=0$.

1090. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha fókuszai: $F_1(-c;\ 0)$; $F_2(c;\ 0)$, és az egyik érintője $y=mx+n$.

1091. Húzzunk olyan érintőt az $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ hiperbolához, amely párhuzamos az $x+y-7=0$ egyenessel. Mi az érintő egyenlete?

1092. Írjuk fel az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ hiperbola olyan érintőjének az egyenletét, amely merőleges az $y=-0{,}3x$ egyenesre.

1093. Írjuk fel az $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolához a $(2;\ 0)$ pontból rajzolható érintők egyenletét.

1094. A $P(1;\ -10)$ pontból érintőket rajzolunk a $4x^2-y^2=32$ hiperbolához. Írjuk fel az érintési pontok által meghatározott húr egyenletét.

1095. A $(0;\ b)$ pontból érintőket húzunk az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolához. Mekkora az adott pont és az érintési pontok közé eső szakaszok hossza?

1096. Húzzunk érintőt az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolához, amely a középponttól és a jobb oldali fókusztól egyenlő távolságra van.

1097. Illesszünk a $9x^2-8y^2=72$ hiperbolához olyan érintőt, amelynek az egyik irányvektora $(1;\sqrt{3})$.

1098. Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $(x_1;\ y_1)$ pontjában merőlegest húzunk az ebben a pontban a hiperbolához tartozó érintőre. Mely pontokban metszi ez az egyenes a koordinátatengelyeket?

1099. Milyen szögben metszik egymást a $9x^2+25y^2=225$ ellipszis és a $12x^2-4y^2=225$ hiperbola?

1100. Igazoljuk, hogy a közös fókuszú ellipszis és hiperbola derékszögben metszik egymást.

1101. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola egyik fókuszának az érintőkre vonatkozó tükörképei a másik fókusz köré a valós tengellyel rajzolt körön vannak.

1102. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola fókuszaiból az érintőkre húzott merőlegesek talppontjai a hiperbola középpontja köré a valós féltengellyel rajzolt körön vannak.

1103. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola bármelyik érintőjének a fókuszoktól mért távolságainak szorzata nem függ az érintő megválasztásától.

SZERKESZTÉSI FELADATOK

1104. A hiperbolát ismertnek tekintjük, ha ismerjük a valós tengelyét és a fókuszainak a távolságát. Szerkesszünk hiperbolát, ha adott

a) a valós és a képzetes tengelyének a hossza;
b) a képzetes tengelyének a hossza és a fókuszainak a távolsága;
c) a két fókusza és egyik pontja;
d) az egyik fókusza, két pontja és a valós tengelyének a hossza;
e) a két fókusza és az egyik aszimptotája;
f) az egyik fókusza és három érintője;
g) a két fókusza és az egyik érintője;
h) az egyik fókusza, az egyik érintője és az egyik tengelypontja;
i) az egyik fókusza, két érintője és a valós tengelyének az iránya;
j) az egyik fókusza, az egyik érintője és a középpontja;
k) az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a valós tengely egyenese;
l) az egyik fókusza és két érintője, az egyiken az érintési ponttal;
m) az egyik fókusza, az egyik érintője, a valós tengelyének az iránya és a valós tengelyének a hossza;
n) az egyik fókusza, az egyik érintője, a valós tengelyének a hossza és az egyik pontja;
o) az egyik érintője és a két tengelypontja;
p) az egyik érintője, a középpontja, a valós tengelyének a hossza és a fókuszok távolsága;
r) a valós tengelyének a hossza és a két aszimptotája;
s) az egyik fókusza, az egyik érintője és az egyik aszimptotája;
t) az egyik tengelyponthoz tartozó érintője, az egyik aszimptotája és a valós tengelyének a hossza;
u) az egyik fókusza, a két aszimptotája és a valós tengelyének a hossza;
v) az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a valós tengelyének az iránya;

z) az egyik aszimptotája, a középpontja és két pontja;
x) a két aszimptotája és egyik pontja;
y) a két aszimptotája és egyik érintője.

1105. Adott a hiperbola két fókusza, a valós tengelyének a hossza és a hiperbola síkjában az e egyenes. Szerkesszük meg az e egyenes és a hiperbola metszéspontjait.

1106. Adott a hiperbola két fókusza, két tengelypontja és a síkjában egy P pont. Szerkesszünk a P pontból a hiperbolához érintőt.

1107. Adott a hiperbola két fókusza és a valós tengelyének a hossza. Szerkesszük meg a hiperbola egyik P pontját. Szerkesszük meg a hiperbola P pontjához tartozó érintőjét.

1108. Adott a hiperbola két aszimptotája és egyik érintője. Szerkesszük meg a hiperbola fókuszait és az adott érintőn az érintési pontot.

1109. Szerkesszük meg a hiperbola aszimptotáit (aszimptotáját), ha
a) adott a hiperbola középpontja, a valós tengelyegyenese és két pontja;
b) adott az egyik fókusza és két érintője, amelyek közül az egyik a hiperbolát a tengelypontban érinti;
c) adott az egyik aszimptotája és három pontja;
d) adott az egyik aszimptotája, az egyik fókusza és a fókuszok távolsága.

A PARABOLA

A PARABOLA EGYENLETE

1110. Rajzoljunk egy egyenest, és tőle 5 cm távolságra jelöljünk ki egy pontot. Szerkesszünk olyan köröket, amelyek az egyenest érintik, és áthaladnak a kitűzött ponton.

1111. Szerkesszük meg a parabola néhány pontját, ha a tengelyponti egyenlete:
a) $x^2 = 8y$; *b)* $y = \frac{1}{4}x^2$; *c)* $x^2 = -2y$; *d)* $x^2 = -\frac{1}{3}y$.

1112. Egy pontot a parabola belső vagy külső pontjának nevezünk aszerint hogy a fókusztól mért r és a vezéregyenestől mért t távolságára

$$r-t < 0, \quad \text{vagy} \quad r-t > 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges pontjának koordinátáira $x^2 < 2py$, illetve $x^2 > 2py$ aszerint, hogy a pont az $x^2 = 2py$ parabola belső vagy külső pontja.

1113. Vizsgáljuk meg, hogy az (1; 2); (−3; 1); (6; 3) és a (−7; 4) pontok az $x^2 = 12y$ parabola belső vagy külső pontjai-e?

1114. A p_1 és p_2 paraboláknak közös a vezéregyenese, a fókuszok az e egyenesre illeszkednek. A p_1 paramétere 4, a p_2 paramétere 6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan középpontos hasonlóság, amely a p_1 parabolát a p_2 parabolába viszi át. Mi a hasonlóság aránya?

1115. Bizonyítsuk be, hogy ha a parabola paramétere p és
a) a tengelypontja az origó, a fókusza az y tengely negatív oldalán van, akkor az egyenlete $y = -\frac{1}{2p}x^2$;

b) a tengelypontja az origó, a fókusza az x tengely pozitív oldalán van, akkor az egyenlete $y^2 = 2px$;

c) a tengelypontja az origó, a fókusza az x tengely negatív oldalán van, akkor az egyenlete $y^2 = -2px$.

Mi az egyenlete annak a parabolának, amelynek a tengelypontja az origó, és

d) áthalad a $(12; 6)$ ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;

e) áthalad a $(4; 4)$ ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;

f) áthalad a $(-4; 3)$ ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;

g) áthalad a $(-8; -6)$ ponton, tengelye az y, illetve az x tengely?

1116. Írjuk fel a parabola tengelyponti egyenletét, ha a fókusza az

a) $(0; 4)$; *b)* $(0; -3)$; *c)* $(0; 2)$; *d)* $(0; -8)$;
e) $(4; 0)$; *f)* $(-5; 0)$ pont?

1117. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

a) a fókusza a $(-7; 0)$ pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $x-7 = 0$;

b) a fókusza a $(0; -4)$ pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $y-4 = 0$.

1118. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

a) a vezéregyenesének az egyenlete $y+1 = 0$, a fókusza a $(4; 3)$ pont;

b) a vezéregyenesének az egyenlete $y-3 = 0$, a fókusza a $(2; -3)$ pont;

c) a vezéregyenesének az egyenlete $y-6 = 0$, a fókusza a $(3; -2)$ pont;

d) a vezéregyenesének az egyenlete $x-1 = 0$, a fókusza a $(4; 2)$ pont;

e) a vezéregyenesének az egyenlete $x+4 = 0$, a fókusza a $(-1; 3)$ pont;

f) a tengelypontja a $(-1; 2)$, fókusza a $(-1; 4)$ pont;

g) a tengelypontja a $(4; 2)$, fókusza a $(8; 2)$ pont;

h) a fókusza a $(0; 6)$ pont, a tengelye az y tengely és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 8 egység;

i) a fókusza a $(6; 2)$ pont, a tengelye párhuzamos az x tengellyel és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 4 egység.

1119. Mi a feltétele annak, hogy az $y = ax^2+bx+c$ parabola áthaladjon a következő ponton:

a) $(0; 0)$; *b)* $(2; 1)$; *c)* $(-4; 0)$; *d)* $(3; -2)$.

1120. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelypontja az $y = 2$ egyenesre illeszkedik, áthalad a $(0; 8)$ ponton, paramétere 3, és a tengelye párhuzamos az y tengellyel.

1121. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelye párhuzamos az x tengellyel, paramétere $\frac{1}{2}$, és áthalad a $(-6; 4)$ és a $(9; 1)$ pontokon.

1122. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

a) a tengelypontja az y tengelyre illeszkedik, tengelye párhuzamos az x tengellyel, és áthalad a $(-4; 1)$ és a $(-1; 1)$ pontokon;

b) a tengelypontja az x tengelyen van, szimmetriatengelye párhuzamos az y tengellyel, és áthalad a $(2; 3)$ és a $(-1; 12)$ pontokon.

1123. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad

a) a $(-2; 3)$; $(4; 0)$; $(8; 8)$ pontokon;
b) a $(-3; 2)$; $(0; 0)$; $(3; 2)$ pontokon;
c) a $(4; 5)$; $(-2; 11)$; $(-4; 21)$ pontokon;
d) az $(1; 1)$; $(3; 0)$; $(4; -4)$ pontokon,

és tengelye párhuzamos az y tengellyel.

1124. Egy parabola tengelye az x tengely, tengelypontja a $(-5; 0)$ pont, és az y tengelyből 12 egység hosszúságú húrt metsz ki. Írjuk fel a parabola egyenletét.

1125. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontja az $(a; 0)$ pont, és az y tengelyt a $(0; b)$ és $(0; -b)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az x tengellyel.

1126. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha az y tengelyt a $(0; b)$, az x tengelyt az $(a; 0)$; $(-a; 0)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az y tengellyel.

1127. Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa a $(2; 1)$ pont, a vele szemközti oldal 8 egység, és párhuzamos az y tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelye párhuzamos az x tengellyel, és az egyenlő oldalú háromszög csúcsain halad át. Hány megoldás van?

1128. Parabolikus tartószerkezetű híd fesztávolsága 60 m, középső legmagasabb pontja 15 m-re emelkedik a vízszintes út fölé. Számítsuk ki a függőleges tartóvasak hosszát, ha azok a híd egyik végétől kiindulva 5 m-enként helyezkednek el.

1129. Egy a vízszinteshez hegyesszögben elhajított kő az eldobástól számítva 36 m-re esett le, és 12 m-re emelkedett. Írjuk fel a röppálya egyenletét.

1130. A vízszintes talajszintjén elhelyezett szökőkútból kilépő víz röppályája parabola, melynek paramétere $\frac{1}{10}$. Milyen magasra emelkedik a vízsugár, ha a szökőkút nyílásától 2 m-re jut vissza a talajra?

1131. Az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsa az origóban van, a BC oldala párhuzamos az y tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek fókusza A, és áthalad a B és C csúcsokon. A háromszög oldala a.

1132. Az $x^2+y^2=r^2$ körben az x tengelyre illeszkedő átmérő és az $y=b$ $(0<b<r)$ egyenletű húr végpontjai parabolát határoznak meg. Írjuk fel e parabola egyenletét.

1133. Határozzuk meg a parabola fókuszának a koordinátáit, a paraméterét és a vezéregyenesének az egyenletét, ha a parabola egyenlete:

a) $y^2=24x$; *b)* $y^2=-8x$; *c)* $x^2=6y$; *d)* $x^2+y=0$;
e) $4y^2+x=0$; *f)* $(x-5)^2=8(y+6)$; *g)* $(y-2)^2=12(x+3)$;
h) $(y-3)^2=-4(x+1)$; *i)* $y^2=4x-8$; *j)* $y^2=4-6x$;
k) $x^2=6y+2$; *l)* $x^2=2-y$; *m)* $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$;
n) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$; *o)* $y^2-10x-2y-19=0$; *p)* $y=Ax^2+Bx+C$.

1134. Határozzuk meg

a) az $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$; *b)* az $y=\frac{1}{4}x^2+x-2$ parabola tengelypontjának és a fókuszának a koordinátáit, ha a parabolát az $y = x$ egyenesre tükrözzük.

1135. Milyen hosszú az $x^2 = 8y$ parabolának az a húrja, amely az $y_1 = 4$, $y_2 = 12$ ordinátájú pontjait köti össze.

1136. Számítsuk ki az $x^2 = 6y$ parabola 6 abszcisszájú pontjának a fókusztól mért távolságát.

1137. Számítsuk ki az $x^2 = 12y$ parabola 6 ordinátájú pontjának a fókusztól mért távolságát.

A PARABOLA ÉS EGYENES

1138. Határozzuk meg

a) az $y = \frac{1}{6}x^2$ parabola és a $2x-3y+6 = 0$ egyenes;

b) az $y = -\frac{1}{9}x^2$ parabola és a $4x+3y-12 = 0$ egyenes;

c) az $y^2 = 4x$ parabola és az $x+y-3 = 0$ egyenes közös pontjainak a számát.

1139. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{9}x^2$ parabola $7x-3y-30 = 0$ egyenesre illeszkedő húrjának a hosszát.

1140. Milyen hosszú az $y = \frac{1}{9}x^2$ parabolának az a húrja, amelynek egyenese fókuszon halad át, és az egyik irányvektora $\mathbf{v}(3;\ \sqrt{3})$?

1141. Az $y = \frac{1}{6}x^2$ parabola tengelypontjából húzzuk meg azt a húrt, amelynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(1;\ \sqrt{3})$, azután rajzoljuk meg a tengelypontból a reá merőleges húrt. Számítsuk ki, hogy a húrok nem közös végpontjain áthaladó egyenes mely pontokban metszi a koordinátatengelyeket.

1142. Határozzuk meg az $y = \frac{x^2}{4}$ parabolának azokat a pontjait, amelyek a $P_1(-1;\ 5)$ és a $P_2(5;\ -1)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak.

1143. Írjuk fel az $y = \frac{1}{20}x^2$ parabola olyan húrjának az egyenletét, amely áthalad az $(5;\ 2)$ ponton, és ez a pont a húrt felezi.

1144. Írjuk fel az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolába írt háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, ha a háromszög egyik csúcsa a parabola tengelypontja, a magasságpontja a parabola fókusza. (Parabolába írt háromszögnek az olyan háromszöget mondjuk, amelynek csúcsai a parabolára illeszkednek.)

1145. Az egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa az $x^2 = 2py$ parabola tengelypontja, a másik két csúcsa a parabolára illeszkedik. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

1146. A súlydobó a golyót a vízszintes talaj felett h magasságból löki el c kezdősebességgel. A kezdősebesség iránya a vízszintessel α szöget zár be. A golyó az A pontban esik a talajra. Mekkora az OA távolság, ha O a súlydobó talpának a helyét jelenti.

1147. A $P_1(-10;\ y_1)$ és a $P_2(15;\ y_2)$ pontok az $y=\frac{1}{10}x^2$ parabolára illeszkednek. Számítsuk ki a parabola P_3 pontjának a koordinátáit, ha a $P_1P_2P_3$ háromszög területe $31\frac{1}{4}$ területegység.

1148. Vizsgáljuk meg a következő parabolák és egyenesek viszonylagos helyzetét:

a) $y=\frac{1}{8}x^2,\quad x-y-2=0;$ é

b) $x^2+3y=0,\quad 8x+3y-15=0;$ m

c) $y^2+5x=0,\quad 5x-y-15=0;$

d) $y^2=4x,\quad x+3y+9=0.$ é

1149. Igazoljuk, hogy az $y=mx+\frac{a}{m}\ (m\neq 0)$ egyenes az $y^2=4ax$ parabola érintője. (Azt az egyenest, amely nem párhuzamos a parabola tengelyével, egyetlen közös pontja van a parabolával, és a parabola síkjában van, a parabola érintőjének mondjuk. Az érintő tehát olyan egyenes, amelynek az érintési pont kivételével minden pontja a parabola külső pontja.)

1150. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $ax+bx+c=0$ egyenes érintse az $y^2=2px$ parabolát?

1151. Igazoljuk, hogy az $y^2=2px$ parabola $(x_1;\ y_1)$ pontjához tartozó érintő egyenlete $yy_1=p(x+x_1)$. Írjuk fel ennek alapján az $y^2=8x$ parabola 1, 2, 3 abszcisszájú pontjaiban húzható érintők egyenletét.

1152. Bizonyítsuk be, hogy a parabola érintője a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) a fókuszból az érintőre húzott merőleges talppontja a tengelyponthoz tartozó érintőre illeszkedik;

b) a fókusznak az érintőre vonatkozó tükörképe a vezéregyenesre illeszkedik;

c) az $y^2=2px$ parabola bármelyik a tengelyponthoz tartozó érintőtől különböző érintője az y tengelyből feleakkora szakaszt vág le, mint amekkora az érintési pont ordinátája;

d) az $y^2=2px$ parabola bármelyik érintője az x tengelyt olyan pontban metszi, amelynek az origótól mért távolsága egyenlő az érintési pont abszcisszájával.

1153. Szerkesszük meg adott parabola adott pontjához tartozó érintőjét.

1154. Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus tükör fókuszából kiinduló fénysugarak visszaverődés után a parabola tengelyével párhuzamosan haladnak és megfordítva, a parabola tengelyével párhuzamosan haladó fénysugarak a visszaverődés után a fókuszon haladnak át.

1155. Az $y^2=12x$ parabola 2, 6, -3 ordinátájú pontjaiban a parabolához érintőket húzunk. Határozzuk meg az érintési pontok által meghatározott háromszög és az érintők alkotta háromszög területeinek az arányát.

1156. Az $y^2 = 16x$ parabola fókuszán át húrt fektetünk, melynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(1; \sqrt{3})$. Számítsuk ki a húr végpontjaiban húzható érintők hajlásszögét.

1157. Az $y^2 = 2px$ parabola $(x_1; y_1)$ pontjához tartozó érintőre merőlegest állítunk az érintési pontban. Mely pontokban metszi ez az egyenes (a normális) a koordinátatengelyeket?

1158. Az $y^2 = 2px$ parabola érintője és a hozzá tartozó normális egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, amelynek alapja az x tengelyre illeszkedik. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit.

1159. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $y^2 = 2px$ parabolát a fókuszán áthaladó és a tengelyére merőleges húr végpontjaiban érinti.

1160. Határozzuk meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx-2$ egyenes érintse az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolát.

1161. Határozzuk meg m értékét úgy, hogy az $y = mx-4$ egyenes érintse az $y^2 = -8x$ parabolát.

1162. Mekkorára kell választani b értékét ahhoz, hogy az $y = x+b$ egyenes messe, érintse, illetve elkerülje az $y = x^2$ parabolát?

1163. Határozzuk meg a b értékét úgy, hogy az $y = x+b$ egyenes érintője legyen az $y^2 = 4x$ parabolának.

1164. Mi a feltétele annak, hogy az $y = mx+b$ egyenes érintse az $y^2 = 2px$ parabolát?

1165. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolának az $y = -x+4$ egyenessel párhuzamos érintőjét.

1166. Az $y^2 = 8x$ parabolához érintőt húzunk, amely párhuzamos az $y = x$ egyenessel. Írjuk fel az érintő egyenletét.

1167. Az $x^2 = 16y$ parabolához érintőt húzunk, amely merőleges az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenesre. Írjuk fel az érintő egyenletét.

1168. Írjuk fel az $y^2 = 12x$ parabola érintőjének az egyenletét

a) az $x = 3$ abszcisszájú pontjaiban;

b) amely párhuzamos a $3x-y+5 = 0$ egyenessel;

c) amely merőleges a $2x+y-7 = 0$ egyenesre;

d) amely 45°-os szöget zár be a $4x-2y+9 = 0$ egyenessel.

1169. Az $y^2 = 2px$ parabolához érintőt húzunk, amely párhuzamos az $y = x$ egyenessel. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit.

1170. Milyen messze van a $3x+4y+46 = 0$ egyenes az $y = \frac{1}{64}x^2$ parabolától?

1171. Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ parabolánál a p értékét úgy, hogy a parabola

a) az $y = \frac{x}{2}+1$ egyenest érintse;

b) az $x-2y+5 = 0$ egyenest érintse.

1172. Mekkora az $y^2 = 2px$ parabola paramétere, ha az az $ax+by+c^2 = 0$ egyenest érinti?

1173. Tekintsük az

$$y = (p-1)x^2+2px+4$$

egyenlettel jellemzett g_p görbesereget:

a) Határozzuk meg a p paramétert úgy, hogy g_p érintse az x tengelyt. (Az érintési pont legyen A.)

b) Határozzuk meg p-t úgy, hogy a g_p parabola tengelypontja az y tengelyen legyen. (A tengelypont legyen B.)

c) Mutassuk meg, hogy a fenti két görbe az AB szakasz felezőpontjára szimmetrikus.

d) Létezik-e olyan pont, amelyen a görbesereg minden görbéje átmegy?

1174. Határozzuk meg a $(9;\ 2)$ pontból az $y = \frac{1}{36}x^2$ parabolához húzható érintők egyenletét.

1175. Határozzuk meg az $(5;\ -7)$ pontból az $y^2 = 8x$ parabolához húzható érintők egyenletét.

1176. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amelyből az $y^2 = 4x$ parabolához húzott érintők a tengelyponthoz tartozó érintővel egyenlő oldalú háromszöget alkotnak.

1177. Határozzuk meg az $y^2 = 16x$ parabolának azt az érintőjét, amelynek az érintési pont és az x tengely közé eső szakasza 20 egység.

1178. Számítsuk ki az alábbi parabolák metszéspontjait:

a) $y^2 = 2x$ és $x^2 = y$; *b)* $x^2 = 3y$ és $x^2 = y-2$; *c)* $y^2+x-2y = 0$ és $x^2 = y$; *d)* $y = x^2$ és $2x = 3y-y^2$; *e)* $y = x^2$ és $y^2+6x-7y = 0$; *f)* $y = x^2+x$ és $y^2-8y+12x = 0$; *g)* $x^2-4x-4y = 4$ és $4x^2 = 4x+4y$; *h)* $y^2 = 2px$ és $y^2 = px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

1179. Egy parabola tengelypontja az $y^2 = 8x$ parabola fókusza, a fókusza pedig az adott parabola tengelypontja. Számítsuk ki a parabolák metszéspontjait.

1180. Számítsuk ki a parabola és a kör metszéspontjait, ha egyenletük:

a) $y^2 = \frac{9}{4}x$ és $x^2+y^2 = 25$; *b)* $y^2 = 18x$ és $x^2+12x+y^2-64 = 0$.

1181. Határozzuk meg az $y^2 = 16x$ parabolának azt a pontját, amely a fókuszától 13 egység távolságra van.

1182. Milyen távolságra van a tengelyponttól az $y^2 = 4{,}5x$ parabolának az a pontja, amely a fókusztól $9\frac{1}{8}$ egységnyi távolságra van?

1183. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontja a $(0;\ -5)$ pont, és érinti az $x^2+y^2 = 9$ kört. (A parabola tengelye az y tengely.)

1184. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely az $(x-11)^2+y^2 = 40$ kört érinti, tengelypontja az origóban van, és a tengelye az x tengely. Határozzuk meg az érintési pontok koordinátáit.

1185. Adott az $(x-a)^2+y^2 = r^2$ kör $(a > 0)$. Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az adott kör az $y^2 = 2px$ parabolát érintse.

1186. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ ellipszis és az $y^2=\frac{20}{3}x$ parabola közös érintőinek az egyenletét.

1187. Számítsuk ki

a) az $x^2+y^2=16$ és az $y^2=6x$;

b) az $x^2+y^2=p^2$ és az $y^2=2px$

görbék hajlásszögét. Írjuk fel az *a)* esetben a görbék közös érintőinek az egyenletét.

1188. A $49x^2+100y^2=4900$ ellipszis középpontja legyen annak a parabolának a fókusza, amelynek a tengelypontja a (0; 7) pont. Számítsuk ki az ellipszis és a parabola közös pontjainak a koordinátáit.

1189. A $64x^2-49y^2=3136$ hiperbola középpontja legyen annak a parabolának a fókusza, amelynek a tengelypontja a $(-7; 0)$ pont. Számítsuk ki a parabola és a hiperbola közös pontjainak a koordinátáit.

1190. Az $y^2=2px$ parabolából az $x=a$ egyenessel $(a>0)$ egy parabolaszeletet határolunk el. Szerkesszünk a parabolaszeletbe maximális területű téglalapot, amelynek középvonala a parabola tengelyére illeszkedik.

1191. Rajzoljuk meg az $y^2=2px$ parabola egyik, a tengelypontjától különböző P pontjához tartozó érintőjét. Az érintőre rajzoljunk merőlegest az érintési pontban. Ez az egyenes az x tengelyt Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasznak az x tengelyre eső merőleges vetülete nem függ a P pont megválasztásától.

1192. Bizonyítsuk be, hogy a parabola három érintője által meghatározott háromszög köré rajzolható kör áthalad a fókuszon.

1193. Tekintsük a parabolának azokat a húrjait, amelyek a parabola tengelypontjából derékszögben láthatók. Bizonyítsuk be, hogy ezek a húrok egy rögzített ponton haladnak át.

1194. Két parabolának közös a tengelye és a fókusza. A tengelypontokat a fókusz elválasztja egymástól. Bizonyítsuk be, hogy a két parabola hajlásszöge 90°. (Két parabola hajlásszögét a metszéspontban a parabolákhoz húzott érintők hajlásszögével definiáljuk.)

1195. Bizonyítsuk be, hogy a parabola vezéregyenesének tetszőleges pontjából a parabolához húzott két érintő érintési pontja és a fókusz egy egyenesre illeszkednek.

1196. A parabola belsejében rögzítsünk egy P pontot. A P ponton áthaladó és a tengellyel nem párhuzamos e egyenes a parabolát R és S pontokban metszi. A P, R, S pontoknak a vezéregyenesre eső merőleges vetületei rendre P_1, R_1, S_1. Bizonyítsuk be, hogy a $P_1R_1 \cdot P_1S_1$ szorzat nem függ az e egyenes megválasztásától. (A parabola belsején azt a síktartományt értjük, amelynek pontjaira $r-t<0$. 1112. feladat.)

1197. Bizonyítsuk be, hogy a parabolának a tengelyére vonatkozó merőleges affinitással származtatott képe parabola. Határozzuk meg a transzformált parabola paraméterét, ha az affinitás aránya: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 2; λ.

1198. Rajzoljuk meg a parabola egyik külső P pontjából az érintőket. Az érintési pontokat jelöljük P_1-gyel és P_2-vel. Bizonyítsuk be, hogy

a) a P pontnak a parabola tengelyétől mért előjeles távolsága a P_1 és P_2 pontok tengelytől mért előjeles távolságainak a számtani közepe;

b) a P pontnak a parabola tengelypontjához tartozó érintőtől mért távolságának a négyzete egyenlő a P_1 és P_2 pontoknak ugyanezen érintőtől mért távolságának a szorzatával;

c) a P pontnak a fókusztól mért távolsága a P_1 és P_2 pontok fókusztól mért távolságainak mértani középarányosa.

1199. A parabola társérintőinek mondjuk azokat az érintőket, amelyeknek a hajlásszöge 90°. A parabola két tetszőleges, de a tengelyponthoz tartozó érintőtől különböző e_1 és e_2 érintője az M pontban, a hozzájuk tartozó társérintők, e_1', és e_2' az M' pontban metszik egymást. Az e_1 és az e_2' metszéspontja Q_1, az e_2 és e_1' metszéspontja Q_2. Bizonyítsuk be, hogy az MM' és a Q_1Q_2 egyenesek a fókuszon haladnak át, és a hajlásszögük 90°.

SZERKESZTÉSEK

1200. A parabolát ismertnek tekintjük, ha tudjuk a fókuszának és a vezéregyenesének a helyét. Ezt szem előtt tartva szerkesszünk parabolát, ha adott

a) a fókusza és a tengelypontja;
b) a tengelye, a tengelypontja és a paraméterének a hossza;
c) a fókusza, egyik érintője az érintési ponttal;
d) a fókusza és két érintője;
e) a fókusza, a tengelye és egyik érintője;
f) a fókusza, az egyik érintője és egyik pontja;
g) a fókusza és két pontja;
h) a fókusza, a tengelye és egyik pontja;
i) a tengelye, a tengelypontja és egyik érintője;
j) a tengelye, a tengelypontja és egyik pontja;
k) a vezéregyenese és az egyik érintője az érintési ponttal;
l) a vezéregyenese, a tengelye és egyik érintője;
m) a vezéregyenese, az egyik érintője és egyik pontja;
n) a vezéregyenese és két pontja;
o) a vezéregyenese, a tengelyponthoz tartozó érintője és egy másik érintője;
p) a tengelyponthoz tartozó érintője és egy másik érintője az érintési ponttal;
r) a vezéregyenese, a tengelye és egyik pontja;
s) a tengelye és egyik érintője az érintési ponttal;
t) a tengelyponthoz tartozó érintője és két másik érintője;
u) két érintője az érintési pontokkal;
v) a tengelyének iránya, két pontja és az egyikre illeszkedő érintője;
z) három érintője és a vezéregyenese.

1201. Adott egy parabola fókusza, a vezéregyenese és egy egyenes. Szerkesszük meg a parabola és az adott egyenes metszéspontját.

1202. Szerkesszünk külső pontból a parabolához érintőt.

1203. Adott a parabola fókusza, egyik pontja és e ponthoz tartozó érintőnek a tengelyponthoz tartozó érintő és a vezéregyenes közötti szakasza. Szerkesszük meg a vezéregyenest.

VEGYES FELADATOK

1204. A $P(-2;\ 3)$ pontból kiinduló fénysugár az x tengelyről visszaverődik. Írjuk fel a beeső és a visszavert fénysugár egyenesének az egyenletét, ha a beeső fénysugár egyik irányvektora $\mathbf{v}(1;\ 3)$.

1205. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(5;\ -12)$, és áthalad a $(-4;\ 16)$ ponton. Számítsuk ki az egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög köré, a háromszögbe írható kör középpontjának és a súlypontnak a koordinátáit.

1206. Induljon el a $(18;\ 7)$ pontból és haladjon az $\mathbf{a}(-4;\ -3)$ vektorral párhuzamos irányban az M pont 2,5 egységnyi sebességgel. Mennyi időegység alatt éri el az M pont az $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ hiperbolát?

1207. Számítsuk ki a $P(8;\ 5)$ pontnak a $2x-3y-8=0$ egyenestől mért távolságát. Tükrözzük P-t az adott egyenesre. Határozzuk meg a tükörkép koordinátáit.

1208. Adott két egyenes: $4x+7y-15=0$, $9x-14y-4=0$.

a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik normálvektora $\mathbf{n}(-1;\ 3)$, és áthalad a két adott egyenes metszéspontján.

b) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a két adott egyenes metszéspontján, és a koordinátatengelyek pozitív felével 4 egység területű háromszöget határoz meg.

c) Számítsuk ki a két adott egyenes hajlásszögét.

1209. Adott két pont: $A(1;\ 2)$, $B(5;\ -1)$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$-nak a koordinátatengelyekkel bezárt szögeit.

1210. Adott két pont: $A(3;\ 5)$, $B(6;\ -2)$. Vetítsük az $\overrightarrow{AB}$-t merőlegesen az $y=x$ egyenesre. Határozzuk meg a vetületének a hosszát.

1211. Határozzuk meg a $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$-t, ha $\mathbf{v}_1(1;\ 2)$, $\mathbf{v}_2(-2;\ 3)$, $\mathbf{v}_3(6;\ -10)$.

1212. Az A és B pontokat összekötő szakaszt az $M_1(1;\ 2)$ és az $M_2(3;\ 4)$ pontok három egyenlő részre osztják. Számítsuk ki az A és a B koordinátáit.

1213. A $(2;\ 3)$ és a $(6;\ 6)$ pontok egy négyzet szomszédos csúcsai. Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit.

1214. A $(3;\ 5)$ és a $(9;\ -7)$ pontokban elhelyezett 2 és 1 tömegegységnyi anyagi pontokból álló rendszernek hol van a súlypontja?

1215. Az m_1, m_2, m_3 tömegű anyagi pontokat rendre az $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ pontokban helyeztük el. Bizonyítsuk be, hogy a három pontból álló anyagi pontrendszer súlypontjának koordinátái

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

1216. A sokszög csúcsaiban egyenlő tömegek vannak. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott anyagi pontrendszer súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepével egyenlő:

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\quad y=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$$

$(n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots)$

1217. Egy szabályos sokszög középpontja az origóban van. Bizonyítsuk be, hogy a csúcsok abszcisszáinak (ordinátáinak) összege zérus.

1218. Egy sokszög mindegyik oldalára egy, az illető oldal hosszával arányos hosszúságú és kifelé mutató merőleges vektort állítunk. A vektorok rendre a következők: $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \ldots \mathbf{p}_n$ (n a sokszög oldalainak a számát jelenti). Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\ldots+\mathbf{p}_n = 0$.

1219. Egy ötszög oldalfelező pontjai (pozitív körüljárást választva) a következők: $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$, $P_4(x_4; y_4)$, $P_5(x_5; y_5)$. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

1220. Egy háromszög területe 10 egység, két csúcsa (5; 1); (−2; 2), a harmadik csúcsa az x tengelyre illeszkedik. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

1221. A koordináta-rendszer eltolása után a (2; 4) pont koordinátái (−3; 0). Számítsuk ki az eredeti koordináta-rendszer origójának a koordinátáit az új koordináta-rendszerben.

1222. Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha csúcsai (0; 1), (1; 1) és (5; 5).

1223. Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete: $x+2y+1 = 0$ és $2x+y-3=0$. Középpontja a (0; 4) pont. Írjuk fel a másik két oldalegyenesének egyenletét.

1224. A (2; −2) ponton áthaladó egyenes az (5; 2) ponttól 3 egységnyi távolságra van. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

1225. Írjuk fel az $x+2y = 1$ és az $x+2y = 3$ egyenesekkel párhuzamos egyenes egyenletét, amely az adott egyenesek távolságát 1:3 arányban osztja.

1226. Egy háromszög két csúcsa: (2; 1); (4; 9), a magasságpontja (0; 4). Írjuk fel az oldalegyenesek egyenletét.

1227. Egy háromszög két oldalegyenese: $x+y-1=0$; $y+1=0$, a súlypontja a (−1; 0) pont. Írjuk fel a harmadik oldalegyenesének egyenletét.

1228. Az e egyenes áthalad az $x+2y-11 = 0$ és a $2x-y-2 = 0$ egyenesek metszéspontján; az origótól 5 egységre van. Írjuk fel e egyenletét.

1229. Húzzunk az origón át olyan egyenest, amelyből az $x-y+1 = 0$ és az $x-y-2 = 0$ egyenesek 3 egységnyi szakaszt vágnak ki.

1230. Az e egyenes áthalad a (2; 3) ponton. e-ből a $3x+4y-7 = 0$ és a $3x+4y+8 = 0$ egyenesek $3\sqrt{2}$ egységnyi szakaszt vágnak ki. Írjuk fel e egyenletét.

1231. Írjuk fel a $3x+4y-3 = 0$ és a $4x-3y+5 = 0$ egyenesek által meghatározott szögek szögfelezőinek az egyenletét.

1232. A $3x-4y = 25$, $5x+12y = 65$ és a $8x+15y+85 = 0$ egyenesek egy háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát.

1233. A $2x+y-1 = 0$ egyenes egy háromszög egyik belső szögfelezője, a háromszög két csúcsa az (1; 2) és a (−1; −1) pont. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

1234. A $2x-y-1 = 0$ egyenes egy háromszög egyik belső szögfelezője, a háromszög két csúcsa az (1; 1) és az (5; 4) pont. A háromszög területe 5 egység. Írjuk fel az oldalak egyenletét.

1235. Valamely egyenlő szárú háromszög alapegyenesének egyenlete: $x+y-1 = 0$; az egyik szár egyenesének egyenlete: $x-2y-2=0$; a másik szárra illeszkedő egyik pont (−2; 0). Írjuk fel az utóbbi szár egyenesének egyenletét.

1236. Az ABC háromszög csúcsainak helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög A csúcsán áthaladó magasság egyenes egyenlete: $(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{x})=0$, ahol $\mathbf{x}$ az egyenesre illeszkedő tetszőleges pont helyvektorát jelenti.

b) Bizonyítsuk be, hogy a magasságvonalak egy pontban metszik egymást.

1237. Az ABC háromszög csúcsainak helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$.

a) Igazoljuk, hogy az AB oldal felező merőlegesének egyenlete: $\left(\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}-\mathbf{x}\right)=0$, ahol $\mathbf{x}$ a felező merőleges tetszőleges pontjának helyvektora.

b) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.

c) Bizonyítsuk be, hogy az oldalfelező merőlegesek közös metszéspontja, O a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van. (A bizonyítás egyszerűsítése céljából válasszuk az O pontot kezdőpontnak. Ekkor az O pont helyvektora a $\mathbf{0}$ vektor, a háromszög csúcsainak helyvektorai: $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$. Vegyük figyelembe azt, hogy az O helyvektora kielégíti az oldalfelező merőlegesek egyenletét.)

d) A *c)*-hez fűzött megjegyzés felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írható kör középpontja, a súlypont és a magasságpont egy egyenesre illeszkednek úgy, hogy a súlypont 1:2 arányban osztja az OM szakaszt (O a háromszög köré írható kör középpontja, M a magasságpont). Igazoljuk, hogy az OM szakasz F felezéspontja középpontja egy olyan körnek, amelynek a sugara a háromszög köré írható kör sugarának a fele, áthalad az oldalak felezéspontjain, a magasságok talppontjain és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezéspontjain (848. feladat).

1238. Tekintsük azt az α hegyesszöget, amelynek a csúcsa az origó, egyik szára az x tengely pozitív fele, a másik szára az $y=mx$ egyenesnek az a része, amelynek pontjaira $x\geq 0$. Az α szöget felező félegyenesen jelöljünk ki egy, a csúcstól különböző P pontot. Rajzoljunk a P ponton áthaladó két, a szög szárait metsző egyenest. Az egyik egyenes a szög száraiból (a csúcstól számítva) a és b, a másik a szögszárakból a_1 és b_1 szakaszokat vág le. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}$.

1239. Írjuk fel az $x^2+y^2-2ax=0$ és az $x^2+y^2-2by=0$ körök hatványvonalának az egyenletét. Számítsuk ki a hatványvonalra illeszkedő húr hosszát.

1240. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amelyből az $x^2+y^2-6y+6=0$ és az $x^2+y^2-2x=0$ körökhöz egyenlő hosszú érintőszakasz húzható.

1241. Írjuk fel általánosan azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek az $x+y=0$ és az $x-y=0$ egyeneseket érintik.

1242. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2-2ax+b^2=0$ és az $x^2+y^2-2cy-b^2=0$ körök merőlegesen metszik egymást.

1243. Az ellipszis P_1 és P_2 pontjait a középponttal összekötő szakaszok d_1 és d_2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

ha d_1 és d_2 merőlegesek egymásra (a és b az ellipszis féltengelyei).

1244. Az ellipszis középpontjából az ellipszis P_1, P_2, P_3, ... P_n pontjaihoz vezető szakaszok legyenek d_1, d_2, ... d_n. Bizonyítsuk be, hogy ha $d_i d_{i+1} \sphericalangle = \frac{\pi}{n}$ ($i = 1, 2, \ldots n-1$), akkor az

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\ldots+\frac{1}{d_n^2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

a és b az ellipszis féltengelyei, és n páros szám.

1245. Az ellipszisnek a középponton áthaladó húrjait az ellipszis átmérőinek, a kör merőleges átmérőinek affin képét a körből származtatott ellipszis konjugált átmérőinek mondjuk. Bizonyítsuk be, hogy

a) az ellipszis konjugált átmérőinek végpontjaiban rajzolt érintők olyan paralelogrammát határoznak meg, amelynek az oldalait az érintési pontok felezik;

b) $a_1 b_1 \sin \omega = ab$,
ahol a_1 és b_1 az ellipszis konjugált félátmérői, a és b az ellipszis féltengelyei, ω a konjugált félátmérők hajlásszöge;

c) az ellipszis konjugált átmérőinek négyzetösszege nem függ a konjugált átmérőpár megválasztásától;

d) ha a konjugált átmérőpár irányvektorai $(1;\ m_1)$ és $(1;\ m_2)$, akkor az $m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}\cdot$ (a és b az ellipszis féltengelyei);

e) az ellipszis konjugált félátmérői által kifeszített háromszög területe nem függ a konjugált félátmérők megválasztásától.

1246. Bizonyítsuk be, hogy az a és b féltengelyű ellipszis területe $ab\pi$.

1247. Számítsuk ki az $x^2+3y^2 = 6$ ellipszis egyenlő hosszú konjugált átmérőinek a hajlásszögét.

1248. Számítsuk ki az $x^2+15y^2 = 5$ ellipszis konjugált átmérőinek a hosszúságát, ha a hajlásszögük 150°.

1249. A $8x^2+17y^2 = 136$ ellipszis konjugált átmérőinek az aránya 4:3. Írjuk fel az átmérők egyenletét.

1250. Számítsuk ki az ellipszis féltengelyeit, ha egyik konjugált átmérőpárja hosszúságainak összege 6 egység, az általuk bezárt szög 150°, és a fókuszok távolsága $\frac{18}{11}$ egység.

1251. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszishez húzott érintő egyenlete:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2},$$

ahol m az egyenes iránytangense, a és b az ellipszis féltengelyei.

1252. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolához húzott $\mathbf{v}(1;\ m)$ irányvektorú érintő egyenlete

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

1253. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2 = a^2+b^2$ körnek a koordinátatengelyekkel való metszéspontjain áthaladó egyenesek érintik az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszist.

1254. Bizonyítsuk be, hogy az $x+y = c$ és az $x+y = -c$ egyenesek érintik az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszist, ha $c^2 = a^2+b^2$.

1255. Számítsuk ki az $y^2 = 2px$ parabola fókuszának az érintőtől való távolságát, ha az érintő irányszöge α.

1256. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabola érintőjének az egyenletét, ha az áthalad a $(0; -4)$ ponton.

1257. Határozzuk meg az $y^2 = 2x$ parabola érintőjének az egyenletét, ha az áthalad $(-4; -1)$ ponton.

1258. Határozzuk meg az $x^2+9y^2 = 9$ ellipszishez a $(2; -1)$ pontból húzható érintők egyenletét.

1259. Határozzuk meg a $4x^2-9y^2 = 36$ hiperbolához a $(3; -6)$ pontból húzható érintők egyenletét.

1260. A merőleges affinitás tengelye legyen az x tengely, és az affinitás aránya $\frac{4}{3}$. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amely az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9} = 1$ hiperbola affin transzformálásakor adódik.

1261. λ mely értéke mellett létezik olyan x, y számpár, amely megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$x^2+y^2-8x-6y = 0$$
$$9x^2+y^2-6y = 0$$
$$y^2-\lambda x-6y+9-\lambda = 0.$$

Milyen geometriai értelmezést adhatunk a feladatnak?

1262. Írjuk fel annak a hiperbolának a középponti egyenletét, amely áthalad a $(\sqrt{6}; 3)$ ponton, és érinti a $9x+2y-15 = 0$ egyenest.

1263. Rajzoljunk a hiperbola F_1 fókuszából egy $2a$ sugarú kört ($2a$ a hiperbola valós tengelye), ezután húzzunk egy e érintőt ehhez a körhöz az F_2 fókuszból. Bizonyítsuk be, hogy e érinti azt a kört is, amelynek a középpontja a hiperbola O középpontjába esik, és a sugara a. Az e egyenes a $2a$ sugarú kört P, az a sugarú kört Q pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az OQ egyenes az F_2P szakasz felező merőlegese.

1264. Adott a hiperbola két fókusza, F_1 és F_2 és egyik P pontja. $PF_1 > PF_2$. Mérjük rá PF_1 szakaszra P-ből a PF_2 szakaszt. Így egy F' pontot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy az $F'F_2$ szakasz felező merőlegese érinti a hiperbolát a P pontban.

1265. Adott az ellipszis két pontja és két tengelyének az egyenese. Szerkesszük meg az adott pontokhoz tartozó ellipszisérintőket.

1266. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis $0 \leq x \leq a$ és $0 \leq y \leq b$ egyenlőtlenségekkel kijelölt ívén szerkesszük meg azt a pontot, amely az $(a; 0)$, $(0; 0)$ és $(0; b)$ pontokkal együtt a legnagyobb területű négyszöget határozza meg.

1267. Az a, b, c, x és y nem negatív számok eleget tesznek a következő egyenleteknek:

$$14x+3y-3a-b-c = 15$$

$$8x-10y+a-b+2c = -3$$

$$11x-y-2a-b-c = 3.$$

Jelöljük ki a derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyeknek koordinátái eleget tesznek a feltételeknek. Milyen értékekre lesz szélső értéke a $3y-4x$ kifejezésnek?

1268. Bizonyítsuk be, hogy ha egy külső P pontból a parabolához két érintőt rajzolunk, akkor az egyik érintő ugyanakkora szöget zár be a PF egyenessel, mint a másik érintő a parabola tengelyegyenesével (F a parabola fókusza).

1269. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög köré írható kör középpontja és magasságpontja olyan ellipszisnek a fókuszai, amelyet a háromszög oldalai érintenek.

1270. Adott 3 pont: A, B és C. Bizonyítsuk be, hogy az ezeken áthaladó bármelyik derékszögű hiperbola középpontja rajta van az ABC háromszög Feuerbach-féle körén.

1271. Szerkesszük meg annak a két parabolának a metszéspontjait, amelyeknek adottak a fókuszai és a közös vezéregyenesük.

1272. Adott ellipszis két érintőjének a metszéspontját jelöljük P-vel, a fókuszokat F_1-gyel és F_2-vel. Bizonyítsuk be, hogy a PF_1 egyenes ugyanakkora szöget zár be az egyik érintővel, mint a PF_2 egyenes a másik érintővel.

1273. A parabola A és B pontján áthaladó szelőjén felvett P pontból érintőket húzunk a parabolához. Az érintési pontok C és D. Húzzunk a C ponton át az AB szelővel párhuzamos húrt, amelynek a másik végpontja E. Bizonyítsuk be, hogy az AB húrnak a felezéspontja rajta van a DE húron.

1274. Bizonyítsuk be, hogy ha két egymást metsző parabolának közös a vezéregyenese, akkor a metszéspontjaikon áthaladó egyenes a fókuszokat összekötő szakasz felező merőlegese.

1275. Rajzoljuk meg a parabola tetszőleges, de a tengelyponttól különböző pontjához húzható érintőjét. Bizonyítsuk be, hogy az érintőnek az érintési pont és a vezéregyenes közötti szakasza a fókuszból derékszögben látszik.

1276. Adott egy O középpontú, r sugarú kör. Az O-tól különböző P ponthoz rendeljük hozzá az OP félegyenesen azt a P' pontot, amelyre

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Az így definiált ponttranszformációt inverziónak (körre vonatkozó tükrözésnek) mondjuk. Az O pontot az inverzió pólusának, az r^2 értékét az inverzió hatványának nevezzük.

a) Fejezzük ki a $P(u; v)$ adott pont $x^2+y^2 = 1$ körre vonatkozó tükörképének a P' pontnak $(u'; v')$ koordinátáit az u és a v segítségével. Szerkesszük meg a P' pontot.

b) Bizonyítsuk be, hogy az inverzió pólusán áthaladó egyenes inverze önmaga, a póluson áthaladó kör inverze egyenes. Szerkesszük meg az egyenest.

c) Bizonyítsuk be, hogy az inverzió pólusán át nem haladó egyenes inverze a póluson áthaladó kör. Szerkesszük meg a kört.

d) Bizonyítsuk be, hogy az inverzió pólusán át nem haladó kör inverze egy a póluson át nem haladó kör. Szerkesszük meg ezt a kört.

e) Az $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszist, illetve hiperbolát tükrözzük az $x^2+y^2=a^2$ körre. Bizonyítsuk be, hogy az inverzió az ellipszist a $b^2(x^2+y^2)^2-a^2(b^2x^2+a^2y^2)=0$, a hiperbolát a $b^2(x^2+y^2)^2-a^2(b^2x^2-a^2y^2)=0$ egyenlettel megadott görbébe viszi át.

MÉRTANI HELYEK*

1277. Egy pont úgy mozog a síkon, hogy a síkban fekvő $P_1(3; 2)$ és a $P_2(-1; 5)$ pontoktól egyenlő távolságra van. Határozzuk meg a mozgó pont pályájának az egyenletét.

1278. Egyenlő szárú háromszög alapjának a végpontjai $(7; 3)$ és $(-7; 1)$. Mi a harmadik csúcs mértani helye a koordináta-rendszer síkjában?

1279. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek áthaladnak az $(1; 5)$ és a $(-3; -1)$ pontokon?

1280. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek egyenlő távolságra vannak az $y=\frac{1}{2}x+3$ és az $y=2x-5$ egyenesektől?

1281. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik az x tengelyt és a $12x-5y=0$ egyenest?

1282. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik a $4x+y+3=0$ és a $4x+y-7=0$ egyeneseket?

1283. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, a koordináta-rendszer síkjában, amelyeknek a sugara 3 egység, és érintik a $2x-5y=2$ egyenest?

1284. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek $(4; 0)$ ponttól mért távolságának a négyzete 20-szal kisebb, mint a $(0; 2)$ ponttól mért távolságának a négyzete?

1285. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek az $x+y=3$ egyenestől 4-szer akkora távolságra vannak, mint a $7x-y+1=0$ egyenestől?

1286. Egy háromszög két csúcsa $(-6; 0)$ és $(6; 0)$, a harmadik csúcsa pedig az $y=-3x+5$ egyenesen mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1287. Egy háromszög két csúcsa $(-4; -6)$ és $(6; 2)$, a harmadik csúcsa pedig az $y=3x+5$ egyenesen mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1288. Egy háromszög két csúcsa $(1; 0)$ és $(5; 0)$. Harmadik csúcsa a koordinátatengelyek által bezárt szög szögfelezőjén mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1289. Egyenlő szárú háromszög egyik szárának végpontjai $A(4; 2)$ és $B(1; 8)$. Mi a harmadik csúcs mértani helye?

1290. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyeknek az $(1; 0)$ ponttól mért távolságuk négyzetének a számértéke egyenlő az $x=1$ egyenestől mért távolságukkal?

* Ebben a fejezetben kitűzött feladatok megoldása előtt célszerű tanulmányozni a 956., 1277., és az 1321. feladatok megoldását.