A KÖR

A KÖR EGYENLETE

799. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az origóban van, és a sugara *a)* 4; *b)* 2,5; *c)* $\frac{3}{4}$; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ egység. (Ha az egyenletben törtek vannak, távolítsuk el azokat.)

800. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja az origóban van, és áthalad
a) a $(4; 7)$ ponton;
b) a $(-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ ponton;
c) az $(a; b)$ ponton.

801. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a
a) középpontja a $(4; 5)$ pont, és a sugara 3 egység;
b) középpontja a $(3; 3)$ pont, és a sugara $\sqrt{5}$ egység;
c) középpontja a $(-1; 3)$ pont, és a sugara 5 egység;
d) középpontja a $(2; 0)$ pont, és a sugara 3,5 egység;
e) középpontja a $(0; -3)$ pont, és a sugara $\sqrt{13}$ egység;
f) középpontja a $(-5; -3)$ pont, és a sugara $\sqrt{2}$ egység.

802. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek
a) középpontja a $(4; 3)$ pont, és áthalad az origón;
b) középpontja a $(-3; 4)$ pont, és áthalad az origón;
c) középpontja az $(a; b)$ pont, és áthalad az origón;
d) középpontja az $(5; -2)$ pont, és áthalad a $(4; 3)$ ponton;
e) középpontja a $2x+y+1=0$ és a $3x-y+9=0$ egyenesek metszéspontja, és áthalad a $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ ponton.

803. Határozzuk meg a $(2; 3)$ középpontú és az $r=5$ sugarú kör -1, 0, 1, 2, 3, 4 abszcisszájú pontjainak az ordinátáit, továbbá az 1, 0, -5 ordinátájú pontjainak az abszcisszáit.

804. Egy kör átmérőjének a végpontjai

a) $(1; 1)$; $(5; -1)$;
b) $(4; 1)$; $(2; 3)$;
c) $(-5; 4)$; $(3; 2)$;
d) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}\right)$; $(-3; 5)$.

Írjuk fel a kör egyenletét.

805. Írjuk fel az $(a;\ b)$ középpontú és az r sugarú kör egyenletét. Milyen határok között változhatnak a körre illeszkedő pontok koordinátái?

806. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és áthalad az $A(-6;\ 0)$ ponton.

807. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az x tengelyt az origóban érinti, és áthalad a $(0;\ 4)$ ponton.

808. Induljunk ki az $(x-6)^2+(y+4)^2 = 36$ körből, és
a) tükrözzük az x tengelyre;
b) tükrözzük az y tengelyre;
c) tükrözzük az origóra;
d) toljuk el a $(2;\ 3)$ vektorral;
e) toljuk el a $(-5;\ -1)$ vektorral;
f) forgassuk el az origó körül $+90°$-kal;
g) forgassuk el az origó körül $-90°$-kal;
h) forgassuk el az origó körül $+60°$-kal;
i) nagyítsuk a középpontjából 2-szeresére;
j) kicsinyítsük az origóból a felére.
Írjuk fel az így kapott körök egyenletét.

809. Mi annak az 5 egység sugarú körnek az egyenlete, amelynek a középpontja
a) az x tengely pozitív oldalára illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
b) az x tengely negatív oldalára illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
c) az y tengely pozitív oldalára illeszkedik, és érinti az x tengelyt;
d) az y tengely negatív oldalára illeszkedik, és érinti az x tengelyt?

810. Írjuk fel a kör egyenletét, ha sugara 5 egység,
a) középpontja az $x = 3$ egyenesre illeszkedik, és érinti az x tengelyt;
b) középpontja az $y = -6$ egyenesre illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
c) mindkét tengelyt érinti.

811. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a sugara r, és mindkét tengelyt érinti.

812. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja az $(a;\ 2a)$ pont, és érinti *a)* az x tengelyt, *b)* az y tengelyt.

813. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely
a) a $(2;\ 9)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
b) a $(6;\ 3)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
c) a $(4;\ 2)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
d) a $(-5;\ 3)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti.

814. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja
a) a $(6;\ 7)$ pont, és érinti az $5x-12y-24 = 0$ egyenest;
b) az $(1;\ 2)$ pont, és érinti az $5x+7y = 11$ egyenest.

815. Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek a sugara 5 egység, áthalad a $(9;\ 9)$ ponton, és *a)* érinti az x tengelyt; *b)* érinti az y tengelyt.

816. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $A(1;\ 6)$ és a $B(4;\ -5)$ pontokon, a középpontja pedig *a)* az x tengelyre, *b)* az y tengelyre illeszkedik.

817. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $A(2;\ 3)$ és a $B(5;\ 2)$ pontokon, a középpontja pedig *a)* az x tengelyre, *b)* az y tengelyre illeszkedik.

818. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad
a) a $P_1(3;\ 0)$ és $P_2(-1;\ 2)$ pontokon, és a középpontja az $x-y+2 = 0$ egyenesre illeszkedik;

b) a $P_1(-1;\ -3)$ és $P_2(-5;\ 3)$ pontokon, és a középpontja az $x-2y+$ $+2=0$ egyenesre illeszkedik;
c) a $P_1(-1;\ 1)$ és $P_2(-7;\ 3)$ pontokon, és a középpontja a $2x+y-9=0$ egyenesre illeszkedik;
d) a $P_1(1;\ 2)$ és $P_2(4;\ -3)$ pontokon, és a középpontja az $y=3x-19$ egyenesre illeszkedik.

819. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti
a) az x tengelyt, és áthalad a $P_1(4;\ -1)$ és a $P_2(-3;\ -2)$ pontokon;
b) az x tengelyt, és áthalad a $P_1(0;\ 4)$ és a $P_2(3;\ 1)$ pontokon;
c) az y tengelyt, és áthalad a $P_1(1;\ 5)$ és a $P_2(8;\ 12)$ pontokon.

820. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad
a) a $(0;\ 4)$ ponton, és az $y=x-3$ egyenest a 4 abszcisszájú pontjában érinti;
b) a $(4;\ 5)$ ponton, és az $x+y=12$ egyenest a 10 abszcisszájú pontjában érinti.

821. Írjuk fel annak a körnek egyenletét, amely érinti
a) az $x+y=4$ egyenest az 1 abszcisszájú pontjában, és a sugara $\sqrt{2}$ egység;
b) az $x-2y=3$ egyenest a -1 abszcisszájú pontjában és a sugara $\sqrt{5}$ egység.

822. Írjuk fel annak a körnek egyenletét, amely áthalad a $(-4;\ 2)$ ponton, a sugara 4 egység, és érinti az $x+y-4=0$ egyenest.

823. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely a $2x-y=6$ és a $2x-y=-14$ párhuzamosokat érinti és áthalad a $(3;\ 4)$ ponton.

824. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a
a) sugara $\sqrt{20}$ egység, és áthalad a $(-2;\ 4)$ és a $(4;\ 2)$ pontokon;
b) sugara 5 egység, és áthalad a $(4;\ -2)$ és az $(5;\ -3)$ pontokon;
c) sugara $\sqrt{10}$ egység, és áthalad a $(0;\ 3)$ és a $(2;\ 5)$ pontokon.

825. Határozzuk meg a következő köregyenletekből a középpontok koordinátáit, a sugarakat, és ábrázoljuk a köröket:

a) $x^2+y^2=25;$
b) $x^2+y^2=10;$
c) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=10;$
d) $x^2+y^2-2x-4y+1=0;$
e) $x^2+y^2-6x+4y+12=0;$
f) $x^2+y^2+4x-6y-36=0;$
g) $x^2+y^2+6x+2y-6=0;$
h) $x^2+y^2-8y+7=0;$
i) $x^2+y^2+10x=0;$
j) $x^2+y^2+2{,}4x-3y-2{,}56=0;$
k) $4x^2+4y^2-20x-75=0;$
l) $16x^2+16y^2-24x-16y-243=0;$
m) $3x^2+3y^2-4x-6y-15=0;$
n) $2x^2+2y^2-3x-5y+3=0;$
o) $x^2+y^2-2ax=0;$
p) $x^2+y^2+ax=0;$

r) $x^2+y^2-2by=0$;
s) $x^2+y^2+by=0$;
t) $x^2+y^2+ax+by=0$;
u) $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

826. Írjuk fel az

a) $x^2+y^2-6x+8y=0$ és az $x^2+y^2+2x-12y+1=0$;
b) $x^2+y^2-6x+10y-2=0$ és az $x^2+y^2+10x-24y=0$

körök centrálisának az egyenletét.

827. Írjuk fel általánosan olyan körnek az egyenletét, amelyik
a) érinti az y tengelyt;
b) érinti az x tengelyt;
c) érinti mindkét tengelyt;
d) áthalad az origón;
e) középpontja az x tengelyre illeszkedik;
f) középpontja az y tengelyre illeszkedik;
g) középpontja az $y=mx+b$ egyenesre illeszkedik.

828. Igazoljuk, hogy az $Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0$ egyenlet ($A\neq 0$) pontot ábrázol, ha $B^2+C^2-4AD=0$.

829. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a (2; 7) ponton, és az $x^2+y^2-10x-6y-2=0$ körrel koncentrikus.

830. Rajzoljunk az (a; b) pont körül koncentrikus köröket r_1 és r_2 sugárral. Írjuk fel az egyenletüket. Hogyan ismerhetjük fel két kör egyenletéből azt, hogy koncentrikus köröket határoznak meg?

831. Hogyan helyezkednek el a (2; 3); (3; -3); (-4; -2); (-4; 3) pontok az $x^2+y^2=20$ körhöz viszonyítva?

832. Hogyan helyezkednek el a (-3; 0); (5; 0); (4; 2); (2; 7); (-4; 6); (3; -1); (-2; 3) pontok az $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ körhöz viszonyítva?

833. Hogyan helyezkednek el a (-1; 3); (-4; 3); ($-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$) pontok az $x^2+y^2+2x-6y+1=0$ körhöz viszonyítva?

834. Bizonyítsuk be, hogy a koordináta-rendszer $\left(\sqrt{2};\ \frac{1}{3}\right)$ pontja körül írt bármely körön legfeljebb egy rácspont van (vagyis olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám).

835. Határozzuk meg, hogy mely pontokban metszik az alábbi körök a koordináta-rendszer tengelyeit:

a) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$;
b) $x^2+y^2+2x-3=0$;
c) $x^2+y^2+4y-5=0$.

836. Számítsuk ki az origó távolságát azoktól a pontoktól, amelyekben az $x^2+y^2-x-5y-2=0$ kör metszi a koordinátatengelyeket. Indokoljuk meg, hogy az x tengelyen mért két távolság szorzata miért egyenlő az y tengelyen mért két távolság szorzatával?

837. Mi az egyenlete annak a körnek, amely az x tengelyt az (5; 0) pontban érinti, s amely az y tengelyből 10 egység hosszúságú húrt metsz ki? Hány megoldás van?

838. Egy kör sugara 50 egység. Írjuk fel a kör egyenletét, ha tudjuk, hogy az x tengelyből 28 egység hosszúságú húrt metsz ki, és áthalad az $A(0; 8)$ ponton.

839. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ kört az $(1;\ 2)$ pontban, és áthalad a $(4;\ -1)$ ponton.

840. Milyen távolságra van az $x^2+y^2-6x+6y+2=0$ kör középpontja a $3x+4y=2$ egyenestől;

841. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az $x^2+y^2+ax+by=0$ kör áthaladjon

a) az $(1;\ 2)$ és a $(-3;\ 3)$ pontokon;
b) a $(4;\ 5)$ és a $(-2;\ 3)$ pontokon.

842. Határozzuk meg a következő három ponton áthaladó kör egyenletét:

a) $(-1;\ 1)$; $(4;\ 2)$; $(4;\ -4)$;
b) $(8;\ 5)$; $(2;\ 7)$; $(10;\ -9)$; **843**
c) $(1;\ 1)$; $(0;\ 4)$; $(9;\ 7)$;
d) $(4;\ 3)$; $(2;\ 3)$; $(3;\ 6)$.

Oldjuk meg a feladatot többféleképpen is.

843. Körív alakú híd fesztávolsága $AB=80$ m, a CD ív magassága 20 m. (843. ábra.) Számítsuk ki a 10 m-enként elhelyezett függőleges tartórudak hosszát.

844. Egy háromszög oldalegyenesei:

a) $4x-5y+13=0$; $7x+2y-31=0$; $3x+7y-1=0$;
b) $y=x+1$; $y=-\frac{1}{2}x-2$; $y=3x-9$;
c) $3x-4y-5=0$; $4x-3y+10=0$; $y=2$.

Határozzuk meg a körülírható kör egyenletét.

845. Valamely háromszög oldalegyenesei:

a) $x-3y=2$; $7x-y=34$; $x+2y=-8$;
b) $x+2y-3=0$; $3x-y-2=0$; $2x-3y-6=0$.

Határozzuk meg a háromszög köré írt kör egyenletét a csúcsok koordinátáinak kiszámítása nélkül.

846. A $(6;\ 5)$; $(8;\ 1)$; $(0;\ -3)$; $(-1;\ 4)$ pontok négyszöget határoznak meg. Vizsgáljuk meg, hogy a négyszög húrnégyszög-e?

847. Egy húrnégyszög három csúcsát ismerjük:

a) $(2;\ 4)$; $(8;\ 2)$; $(1;\ -4)$. A negyedik csúcs az y tengely negatív oldalára illeszkedik;
b) $(0;\ 5)$; $(0;\ -5)$; $(8;\ 2)$. A negyedik csúcs az x tengely pozitív oldalára illeszkedik.

Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit.

848. Igazoljuk, hogy a $(-6;\ 0)$; $(10;\ 0)$; $(0;\ 16)$ pontokkal meghatározott háromszögben az oldalak felezőpontjai, a magasságvonalak talppontjai és a középháromszög csúcsai egy körön helyezkednek el. (A középháromszög csúcsain a háromszögcsúcsok és a magasságpont közötti távolságok felezőpontjait értjük. A 9 nevezetes ponton áthaladó kört a háromszög Feuerbach-féle körének nevezzük.)

849. Egy háromszög csúcsai $(-5;\ 0)$; $(5;\ 0)$; $(2;\ 10)$. Írjuk fel Feuerbach-féle körének az egyenletét. Igazoljuk, hogy a Feuerbach-féle kör sugara fele a körülírt kör sugarának, és a középpontja a háromszög Euler-féle egyenesére illeszkedik. Milyen arányban osztja a Feuerbach-féle kör középpontja a magasságpont és a súlypont meghatározta szakaszt?

850. Határozzuk meg az $(a;\ 0)$; $(b;\ 0)$; $(0;\ c)$ pontokkal megadott háromszög Feuerbach-féle körének az egyenletét.

851. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja

a) a $(0;\ 0)$ pont, és a kör érinti a $2x-y-5=0$ egyenest;
b) a $(2;\ 3)$ pont, és a kör érinti az $x-3y+4=0$ egyenest;
c) a $(-1;\ 2)$ pont, és a kör érinti a $4x-y-5=0$ egyenest;
d) a $(6;\ 7)$ pont, és a kör érinti az $5x-12y-24=0$ egyenest;
e) a $\frac{2x-3}{3}-\frac{3y-8}{6}=0$ és az $\frac{x+5}{3}+\frac{2y-4}{5}=2$ egyenesek metszéspontja, és a kör érinti az $y=x-1$ egyenest.

852. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely

a) érinti a $4x-3y=26$ egyenest az 5 abszcisszájú pontjában, és áthalad a $(-2;\ -3)$ ponton;
b) érinti a $2x+y=8$ egyenest a 4 abszcisszájú pontjában, és áthalad a $(7;\ 3)$ ponton;
c) érinti az $x+y=1$ egyenest a 4 abszcisszájú pontjában, és áthalad a $(6;\ 7)$ ponton.

853. Írjuk fel az $x-2=0$ és az $x-8=0$ egyeneseket érintő, középpontjával a $3x-y-6=0$ egyenesre illeszkedő kör egyenletét.

854. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik érinti a koordinátatengelyeket és az $x+y=4$ egyenest. Hány megoldást kapunk?

855. Írjuk fel az $x+2y-4=0$, $x+2y-2=0$ és az $y=2x-5$ egyeneseket érintő körök egyenletét.

856. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja

a) az $x+y=3$ egyenesre illeszkedik, az $x-3y=0$ és a $3x+y-2=0$ egyeneseket érinti;
b) az $x+y=4$ egyenesre illeszkedik, az $x+y-1=0$ és a $7x-y-5=0$ egyeneseket érinti.

857. Írjuk fel az 5 egység sugarú, az $y=2x+5$ és a $2y+x+10=0$ egyeneseket érintő körök egyenletét.

858. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $(1;\ 1)$ ponton, és érinti a $7x+y-3=0$ és az $x+7y-3=0$ egyeneseket.

859. Írjuk fel annak a körnek egyenletét, amely áthalad a $(2;\ 11)$ és a $(10;\ 11)$ pontokon, és érinti az $x+y=5$ egyenest.

A KÖR ÉS EGYENES

860. Határozzuk meg

a) az $x^2+y^2=25$ kör és a $2x+y=10$ egyenes;
b) az $x^2+y^2=10$ kör és a $3x+y=10$ egyenes;
c) az $x^2+y^2=r^2$ kör és az $x+y=a$ egyenes;
d) az $x^2+y^2=r^2$ kör és az $y=mx$ egyenes;
e) az $x^2+y^2=r^2$ kör és az $y=mx+b$ egyenes közös pontjainak számát.

A *c)* és *e)* feladatban vizsgáljuk meg, hogy a, illetve b milyen értékei mellett kapunk 2, 1, 0 közös pontot?

861. Milyen helyzetűek az alábbi egyenesek az $x^2+y^2 = 36$ körhöz képest:

a) $x-2y+5 = 0$; *b)* $5x-12y+26 = 0$;
c) $3x-4y+30 = 0$; *d)* $x+y-17 = 0$.

862. Határozzuk meg

a) az $x^2+y^2-5x = 0$ kör és az $y = x-2$ egyenes;
b) az $x^2+y^2-2x = 0$ kör és a $3x-y = 0$ egyenes;
c) az $x^2+y^2-2x-2y+1 = 0$ kör és a $2y-x-1 = 0$ egyenes;
d) az $x^2+y^2+4x-4y-18 = 0$ kör és az $x-y = 2$ egyenes;
e) az $(x-1)^2+(y+3)^2 = 25$ kör és a $4x-3y-38 = 0$ egyenes közös pontjainak a számát.

863. Milyen helyzetű

a) a $3x-2y = 7$ egyenes az $x^2+y^2-2x-4y-15 = 0$ körhöz képest?
b) a $3x-4y = 19$ egyenes az $x^2+y^2-4x-6y-12 = 0$ körhöz képest?
c) a $(7;\ -1)$ és az $(1;\ 7)$ pontokon átmenő egyenes az $x^2+y^2 = 25$ és az $x^2+y^2 = 36$ körökhöz képest?

864. Számítsuk ki annak a húrnak a hosszát, amelyet az $x^2+y^2-14x-4y-5 = 0$ kör metsz ki a $2y-3x+12 = 0$ egyenesből.

865. Valamely kör egyenlete $x^2+y^2+2x-2y = 14$. Határozzuk meg az $(1;\ 3)$ ponton áthaladó legrövidebb húr egyenletét és hosszúságát.

866. Mutassuk meg, hogy az $x^2+y^2 = 1$ körnek végtelen sok olyan pontja van, amelynek koordinátái racionális számok.

867. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2+y^2 = 25$ kör és az $x-7y+25 = 0$ egyenes metszéspontjain és a $(0;\ 0)$ ponton.

868. Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek az $x+2y = 7$ egyenesre illeszkednek, és a $(3;\ 7)$ ponttól 5 egység távolságra vannak.

869. Egy derékszögű háromszög átfogójának a végpontjai $(2;\ 5)$ és $(-4;\ -3)$, a hozzá tartozó magasság talppontjának az ordinátája 2,12. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

870. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2+y^2 = 100$ kört a $(6;\ -8)$ pontban érinti, és a sugara 15 egység.

871. Adott az e egyenes: $y = \frac{1}{2}x+9$, ennek egyik partján az A és a B pont: $A(-2;\ 3)$, $B(5;\ 4)$, továbbá a $d = 4\sqrt{5}$ szakasz. Szerkesszünk az A és B pontokon áthaladó olyan kört, amely az e egyenesből d hosszúságú húrt metsz ki.

872. Az XOY derékszög szögfelezőjén rögzítsünk egy O-tól különböző P pontot. Ezután rajzoljunk egy, az O és P ponton áthaladó kört. Ez a derékszög szárait az O-tól különböző A és B pontokban is metszi. Bizonyítsuk be, hogy az előjeles OA és OB távolságok összege nem függ a kör sugarától.

873. Határozzuk meg az r sugarú kör adott pontjában a körhöz húzott érintő egyenletét, ha a kör középpontja az origóban van.

874. Írjuk fel az $x^2+y^2 = 25$ kör $(4;\ 3)$ pontjához tartozó érintőjének az egyenletét.

875. Mekkora szöget zárnak be az $x^2+y^2=36$ kör -5 abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintők?

876. Az $x^2+y^2=100$ körhöz érintőket húzunk a $(6; 8)$ és a $(8; 6)$ pontokban. Számítsuk ki az érintők metszéspontját és hajlásszögét.

877. Húzzunk érintőt az $x^2+y^2=1$ körhöz a $(0; 1)$; $(-1; 0)$; $(0; -1)$; $(x_1; y_1)$ pontjaiban, ahol x_1 tetszőleges, 1-nél kisebb pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy a keletkező trapéz átlói az y tengelyen metszik egymást. Átmegy-e a metszésponton a nem párhuzamos oldalak érintési pontjain áthaladó egyenes?

878. Írjuk fel

a) a $(10; 0)$ pontból az $x^2+y^2=25$ körhöz húzható érintők egyenletét;
b) a $(7; 1)$ pontból az $x^2+y^2=25$ körhöz húzható érintők egyenletét;
c) a $(8; 4)$ pontból az $x^2+y^2=16$ körhöz húzható érintők egyenletét;
d) a $(-1; 3)$ pontból az $x^2+y^2=5$ körhöz húzható érintők egyenletét.

Számítsuk ki az érintési pontok koordinátáit, az érintőszakaszok hosszát és az érintők hajlásszögét.

879. Milyen szög alatt látszik az $x^2+y^2=16$ kör a $(8; 0)$ pontból?

880. Az $x^2+y^2=100$ kör köré írt érintő négyszög két szemközti csúcsa: $(-12; 3{,}5)$; $(12; 10)$. Számítsuk ki a hiányzó csúcsok koordinátáit.

881. Keressük meg az

a) $x^2+y^2=25$ körnek a $4x-2y=7$ egyenessel párhuzamos érintőit;
b) $x^2+y^2=5$ körnek a $2x-y+1=0$ egyenessel párhuzamos érintőit;
c) $x^2+y^2=169$ körnek az $5x+12y-11=0$ egyenessel párhuzamos érintőit;
d) $x^2+y^2=25$ körnek az $y=3x-7$ egyenesre merőleges érintőit.

882. Egy 12 egység sugarú kör középpontja az origóban van. Az x tengely pozitív oldalára illeszkedő egyik P pontból érintőket húztunk a körhöz. Írjuk fel az érintők egyenletét, ha $PQ=35$ egység, ahol Q az érintési pont.

883. Egyenlő szárú háromszög alappal szemközti csúcsa $(6; 8)$, a beírt kör egyenlete $x^2+y^2=64$. Írjuk fel az alapegyenesének egyenletét, és számítsuk ki a hiányzó két csúcs koordinátáit.

884. Írjuk fel az $x^2+y^2=12$ körhöz rajzolt egyenlő oldalú érintő háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, és számítsuk ki a háromszög csúcsainak a koordinátáit, ha az egyik csúcsa az y tengely pozitív oldalára illeszkedik.

885. Adott a K kör és egy e egyenes, amelyeknek nincs közös pontja. Az egyenes minden pontja körül olyan kört szerkesztünk, amelynek a sugara a pontból a körhöz húzható érintőszakasszal egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az így rajzolt körök két rögzített ponton mennek át. Mit mondhatunk akkor, ha a K-nak és az e-nek van közös pontja?

886. Határozzuk meg az r sugarú kör adott pontjához tartozó érintőjének az egyenletét, ha a középpontja a $C(u; v)$ pont.

887. Írjuk fel

a) az $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ kör $(5; 5)$ pontjához tartozó érintőjének az egyenletét;
b) az $x^2+y^2-2x-3y=0$ kör $(0; 3)$ pontjához tartozó érintőjének az egyenletét;

c) az $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ kör -1 abszcisszájú pontjához tartozó érintőjének az egyenletét.

888. Az $x^2+y^2+4x-4y-18=0$ körhöz egy kívüle fekvő P pontból érintőket rajzolunk. Számítsuk ki a P pont koordinátáit, ha az érintési pontokon áthaladó szelő egyenlete $x-y-2=0$.

889. Mekkora szögben metszi az $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ kör a koordinátarendszer tengelyeit?

890. A P anyagi pont erő hatására az $(x-5)^2+(y+3)^2=25$ körön mozog. Amikor a $P(2;\ 1)$ pontba érkezik, az erő hatása megszűnik. Írjuk fel további pályájának az egyenletét.

891. Az $x^2+y^2-6x+10y-66=0$ körhöz érintőket húzunk, melyek párhuzamosak a $4x-3y=0$ egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenleteit és az érintési pontok koordinátáit.

892. Az $x^2+y^2-10x-12y+45=0$ körhöz érintőket húzunk, amelyek párhuzamosak az $y=3x$ egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenleteit.

893. Az $x^2+(y-2)^2=5$ körhöz érintőket húzunk, amelyek merőlegesek az $y=0{,}5x+1$ egyenesre. Írjuk fel az érintők egyenleteit.

894. Írjuk fel

a) az $x^2+y^2-10x-4y+25=0$ kör origón áthaladó érintőinek az egyenletét;

b) az $x^2+(y+2)^2=5$ kör $(5;\ 3)$ ponton áthaladó érintőinek az egyenletét;

c) az $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ kör $(3;\ 1)$ ponton áthaladó érintőinek az egyenletét;

d) az $(x+3)^2+(y-2)^2=25$ kör $(2;\ 6)$ ponton áthaladó érintőinek az egyenletét.

895. Milyen hosszú érintő húzható az $x^2+y^2-10x+2y+10=0$ körhöz a $P_1(0;\ -1)$; $P_2(1;\ -1)$; $P_3(2;\ 0)$; $P_4(0;\ 0)$ pontokból?

896. A P anyagi pont az $(x-4)^2+(y-8)^2=20$ körön mozog. Miután a centripetális erő megszűnik, a pont pályája áthalad a $(-2;\ 0)$ ponton. Melyik pontban hagyta el a mozgó pont a körpályát?

897. Határozzuk meg a $3x-2y-4=0$ egyenesnek azokat a pontjait, melyekből az $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ körhöz húzott érintők 60°-os szöget zárnak be.

898. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ kör akkor és csak akkor metszi merőlegesen az $ax+by+c=0$ egyenest, ha $aA+bB-2c=$ $=0$.

899. Írjuk fel

a) az $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ és az $(x+2)^2+(y+1)^2=9$ körök;

b) az $x^2+y^2=225$ és az $x^2-30x+y^2+189=0$ körök;

c) az $x^2+y^2-6x=0$ és az $x^2+y^2-6y=0$ körök közös érintőinek az egyenletét.

900. Adott két kör. Az egyik középpontja $(1;\ 3)$ és a sugara $\sqrt{5}$; a másik középpontja $(0;\ 1)$ és a sugara $2\sqrt{5}$. Írjuk fel a közös érintőiknek az egyenletét.

901. A k és k_1 körök olyan helyzetűek, hogy a k_1 kör áthalad a k kör középpontján. A két kör közös érintői a k_1 kört A, illetve B pontban érintik. Bizonyítsuk be, hogy az AB egyenes a k kör érintője.

KÖRÖK VISZONYLAGOS HELYZETE

902. Vizsgáljuk meg a következő körök viszonylagos helyzetét:
a) $x^2+y^2-2x-4y-3=0$, $x^2+y^2-4x-6y-5=0$;
b) $x^2+y^2-2x+4y-1=0$, $x^2+y^2-6y-3=0$;
c) $x^2+y^2-10x-8y-4=0$, $x^2+y^2-2x-4y=0$;
d) $x^2+y^2+2x=0$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$.

903. Igazoljuk, hogy az $x^2+y^2=25$ és az $x^2+y^2-12x-16y+75=0$ körök érintik egymást. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a két kör érintési pontján, és a tengelyeket érinti.

904. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2+y^2-x=0$ és az $x^2+y^2-2y=0$ körök metszéspontjain, és a) a sugara $\sqrt{5}$; b) a középpontja az $y=x$ egyenesre illeszkedik.

905. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2+y^2+x-y-6=0$ és az $x^2+y^2-2x+y-10=0$ körök metszéspontjain, és a középpontja az x tengelyre illeszkedik.

906. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2+y^2+3x-y-5=0$ és a $2x^2+2y^2-3x+2y-4=0$ körök metszéspontjain, és a középpontja az y tengelyre illeszkedik.

907. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely
a) áthalad az $x^2+y^2-x+y-2=0$ és az $x^2+y^2=5$ körök metszéspontjain és a $(2;\ -2)$ ponton;
b) áthalad az $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ és az $x^2+y^2-4x=0$ körök metszéspontjain és az $(1;\ 3)$ ponton.

908. Határozzuk meg az $x^2+y^2-4x-10y+19=0$ körnek azokat a pontjait, amelyek $(5;\ -1)$ ponttól 5 egység távolságra vannak.

909. Írjuk fel a $(2;\ 1)$ ponton áthaladó és az $x^2+y^2-8x-4y+19=0$ kört érintő egységsugarú kört.

910. Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek a középpontja a $(6;\ 4)$ pont, és az $x^2+y^2-2x+2y-14=0$ kört a) kívülről; b) belülről érinti.

911. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek sugara $\sqrt{8}$, áthalad a $(-1;\ 3)$ ponton, és az $(x+2)^2+(y+2)^2=2$ kört kívülről érinti.

912. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az x tengelyen van, az $(x+2)+(y+3)^2=100$ kört belülről, az $(x-10)^2+(y-6)^2=25$ kört pedig kívülről érinti.

913. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $(x+1)^2+(y-2)^2=100$ kört a $(7;\ 8)$ pontban belülről és az x tengelyt érinti.

914. Írjuk fel a koordinátatengelyeket és az $(x+3)^2+(y+1)^2=25$ kört kívülről érintő kör egyenletét. Hány megoldás van?

915. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit (2 tizedesjegy pontossággal), ha a sugara 5 egység, és az $x^2+y^2=25$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$ köröket érinti.

916. Írjuk fel az $x^2+y^2+10x+19=0$ és az $x^2+y^2-16y+4=0$ körök metszéspontjain áthaladó és az x tengelyt érintő kör egyenletét.

917. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely az $(x-2)^2+(y-9)^2=4$, $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ és $(x-9)^2+(y-8)^2=4$ köröket kívülről érinti.

918. Milyen szögben metszik egymást az $x^2+y^2=16$ és az $(x-5)^2+y^2=9$ körök?

919. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0$$

és az $x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0$

egyenletekkel megadott körök akkor és csakis akkor metszik egymást derékszögben, ha $2(a_1a_2+b_1b_2)=c_1+c_2$.

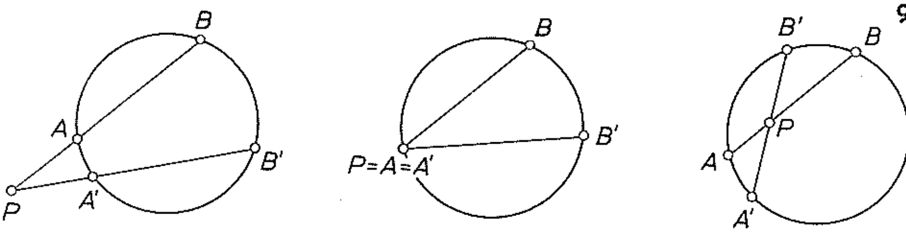
920. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $(0;\ 1)$ és az $(1;\ 0)$ pontokon, és az $x^2+y^2+2x=0$ kört merőlegesen metszi.

921. Írjuk fel a $(2;\ 3)$ ponton áthaladó és az $x^2+y^2=1$ kört merőlegesen metsző 3 egység sugarú kör egyenletét.

922. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az $x+y=7$ egyenestől 5-ször olyan távol van, mint az $x-7y+33=0$ egyenestől, áthalad a két egyenes metszéspontján, és az x^2+y^2-28x+ $+6y+165=0$ kört derékszögben metszi.

PONTNAK KÖRRE VONATKOZÓ HATVÁNYA, HATVÁNYVONAL, HATVÁNYPONT, KÖRSOR

923. Bizonyítsuk be, hogy ha egy ponton át szelőket húzunk a körhöz, akkor a szelők szeleteinek a szorzata állandó. (Három esetet kell vizsgálni, 923. ábra.)



923

924. Az előjeles távolságokkal számított $PA \cdot PB$ szorzatot a P pont körre vonatkozó hatványának mondjuk (923. feladat). (Állapodjunk meg abban, hogy ha A a PB szakaszra illeszkedik, akkor a PA és PB távolságok azonos előjelűek, ellenkező esetben különböző előjelűek.) Igazoljuk, hogy a P pontnak körre vonatkozó hatványa pozitív, nulla vagy negatív, aszerint, hogy a P pont a körön kívül, a körön vagy a körön belül van.

925. Fejezzük ki a P pontnak a körre vonatkozó hatványát a sugár és a pont körközépponttól mért távolsága segítségével.

926. Igazoljuk, hogy egy körön kívül levő pontnak a körre vonatkozó hatványa a pontból a körhöz húzott érintő négyzetével egyenlő.

927. Fejezzük ki a $P(x;\ y)$ pontnak egy adott körre vonatkozó hatványát a sugárral és a középpont koordinátáival.

928. Számítsuk ki a

a) $P(2;\ 3)$ pontnak az $x^2+y^2-8x+6y-1=0$ körre;
b) $P(0;\ 0)$ pontnak az $x^2+y^2-2x-8y=0$ körre;
c) $P(3;\ -1)$ pontnak az $x^2+y^2-25=0$ körre;
d) $P(-2;\ 1)$ pontnak az $x^2+y^2-4x+6y+13=0$ körre

vonatkozó hatványát.

929. Adott az $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ kör. Határozzuk meg, hogy a következő pontok hogyan helyezkednek el a körhöz viszonyítva? (Melyik pont van a körön belül, melyik van a körön kívül, melyik illeszkedik a körre?) $A(0;0)$, $B(2;3)$, $C(0;\sqrt{7}-1)$, $D(3;-2)$.

930. Számítsuk ki azt, hogy a $P(-4;6)$ pontból mekkora érintőszakasz húzható az $x^2+y^2-3x+2y-5=0$ körhöz?

931. Legyen $K_1 \equiv (x-u_1)^2+(y-v_1)^2-r_1^2=0$ és $K_2 \equiv (x-u_2)^2+(y-v_2)^2-r_2^2=0$ két nem koncentrikus kör. Igazoljuk, hogy a $K_1-K_2=0$ olyan egyenesnek az egyenlete, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) merőleges a két adott kör centrális egyenesére;

b) bármelyik pontjának a két körre vonatkozó hatványa egyenlő.

A $K_1-K_2=0$ egyenlettel definiált egyenest a két kör hatványvonalának mondjuk.

Két koncentrikus körnek miért nincs hatványvonala?

932. Számítsuk ki

a) az $x^2+y^2-9=0$, $x^2+y^2-8x-12y+48=0$;

b) az $x^2+y^2-10=0$, $x^2+y^2-10x-10y+30=0$;

c) az $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2+6x+2y+6=0$

körök hatványvonalának az egyenletét. Határozzuk meg a koordinátatengelyeken azokat a pontokat, amelyekből a két körhöz egyenlő hosszú érintőszakasz húzható. Számítsuk ki az érintőszakasz hosszát.

933. Számítsuk ki a következő körök közös húrjának a hosszúságát:

a) $x^2+y^2-6x-8y=0$, $x^2+y^2=9$;

b) $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-x+2y=0$;

c) $x^2+y^2=10$, $x^2+y^2-10x-10y+30=0$;

d) $2x^2+2y^2-x=0$, $x^2+y^2+4x-2y=0$;

e) ha sugaraik $r_1=r_2=10$ egység, középpontjaik $O_1(7;1)$ és $O_2(-7;3)$. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből a két körhöz egyenlő hosszúságú érintőszakasz húzható. Hogyan módosul a mértani hely, ha $r_1=r_2=5\sqrt{2}$.

934. Számítsuk ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekből az $x^2+y^2+2x-2y-4=0$ és az $x^2+y^2+6x+5=0$ körökhöz 3 egység hosszúságú érintőszakaszok húzhatók.

935. Számítsuk ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekből az $(x-3)^2+(y-4)^2=36$ és az $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ körökhöz 7 egység hosszúságú érintőszakaszok húzhatók.

936. Bizonyítsuk be, hogy ha három kör között nincs két koncentrikus, akkor a hatványvonalaik vagy párhuzamosak, vagy egyetlen egy közös pontjuk van. Ezt az egyetlen pontot a három kör hatványpontjának mondjuk.

937. Határozzuk meg

a) az $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-4y=0$, $x^2+y^2-6x+8y+24=0$;

b) az $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-y-6=0$, $x^2+y^2+3x-2y-4=0$

körök hatványpontját.

938. Az $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, $(x+2)^2+(y-3)^2=16$, $(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$ körök hatványpontja az $y=x+1$ egyenesre illeszkedik. Számítsuk ki a harmadik kör sugarát.

939. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $(5; -4)$ ponton, és merőlegesen metszi az $(x-3)^2+y^2 = 24$ és az $x^2+(y+1)^2 = 16$ köröket.

940. Az ABC háromszög AA_1 és BB_1 súlyvonalai fölé Thalész-köröket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög C csúcsán áthaladó magasságvonal e két kör hatványvonalával egyenlő.

941. Igazoljuk, hogy ha a trapéz szárai nem párhuzamosak, akkor a trapéz átlóihoz tartozó Thalész-körök hatványvonala és a szárak egyenesei egy ponton haladnak át.

942. Legyen a $K_1 = 0$ és a $K_2 = 0$ két koncentrikus kör egyenlete. Minek az egyenlete az $\alpha\, K_1+\beta\, K_2 = 0$ egyenlet, ahol α és β adott valós számok.

943. Legyen a $K_1 = 0$ és a $K_2 = 0$ két egymást P pontban érintő kör egyenlete. Bizonyítsuk be, hogy az $\alpha\, K_1+\beta\, K_2 = 0$, ahol α és β adott valós számok, de $\alpha+\beta \neq 0$, olyan körnek az egyenlete, amely az adott köröket P pontban érinti. Minek az egyenlete az $\alpha\, K_1+\beta\, K_2 = 0$ egyenlet, ha $\alpha+\beta = 0$?

944. Legyen a $K_1 = 0$ és a $K_2 = 0$ két egymást metsző kör. Bizonyítsuk be, hogy az $\alpha\, K_1+\beta\, K_2 = 0$, ahol α és β adott valós számok, de $\alpha+\beta \neq 0$, olyan körnek az egyenlete, amely áthalad a két adott kör metszéspontján. Minek az egyenlete az $\alpha\, K_1+\beta\, K_2 = 0$ egyenlet, ha $\alpha+\beta = 0$?

945. Egy adott pont körül írt körök együttesen koncentrikus körsort alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2-6x+8y+10 = 0$ és az $x^2+y^2-6x+8y = 0$ ugyanannak a koncentrikus körsornak az elemei. Határozzuk meg ennek a koncentrikus körsornak azt az elemét, amely áthalad a $(2; 0)$ ponton.

946. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2+6x-40 = 0$ és az $x^2+y^2-14x+40 = 0$ köröknek csak egy közös pontja van. A közös ponton áthaladó és középpontjával az adott körök centrális egyenesére illeszkedő körök körsort alkotnak. Írjuk fel a körsor azon elemének az egyenletét, amely áthalad a $(-8; -5)$ ponton.

947. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2-4x-4y-4 = 0$ és az $x^2+y^2+6x-4y+3 = 0$ köröknek két közös pontja van. A két közös ponton áthaladó körök körsort alkotnak. Határozzuk meg a körsor azon elemének egyenletét, amelynek a sugara 4 egység.

948. Adott három kör: $x^2+y^2-2x-2y-1 = 0$, $x^2+y^2+x-y-1 = 0$, $x^2+y^2+ax-4y+b = 0$. Hogyan kell az a és a b értékét megválasztani, hogy a megadott körök ugyanahhoz a körsorhoz tartozzanak?