A PONT ÉS EGYENES

HELYVEKTOR

515. Szerkesszük meg derékszögű koordináta-rendszerben a

a) $(4; 2)$; *b)* $(-5; 3)$; *c)* $(-6; -3)$; *d)* $(4; -2)$;
e) $(0; 0)$; *f)* $(6; 0)$; *g)* $(-2; 0)$; *h)* $(0; 4)$;
i) $(0; -2)$; *j)* $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$; *k)* $\left(\frac{2}{3}; -3{,}2\right)$; *l)* $(\sqrt{3}; 0)$;
m) $(-\sqrt{2}; -\sqrt{5})$; *n)* $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}; \frac{\sqrt{8}+3}{2}\right)$ helyvektorokat, és számítsuk ki az abszolút értéküket. (A továbbiakban is koordináta-rendszeren mindig derékszögű koordináta-rendszert értünk, és a tengelyeken azonos egységeket veszünk fel.)

516. Jelöljünk ki helyvektorokat a koordináta-rendszerben, és határozzuk meg a koordinátáikat!

517. Ábrázoljuk azt a háromszöget, amelynél a csúcsok helyvektorai:

a) $(5; 1)$; $(-2; 3)$ és $(-1; 5)$; *b)* $(0; 0)$; $(-2; -5)$ és $(8; -1)$.

518. Ábrázoljuk azt a négyszöget, amelynél a csúcsok helyvektorai:

a) $(5; -2)$; $(4; 3)$; $(-2; 8)$; $(2; -5)$;
b) $(1; 4)$; $(-3; 0)$; $(-3; 5)$; $(4; 2)$.

519. Határozzuk meg a $(3; 4)$; $(-4; 2)$; $(2; -5)$; $(3; -5)$; $(4; 4)$; $(5; 0)$; $(2; -2)$; $(p; q)$ helyvektorok tükörképeinek koordinátáit, ha azokat

a) az x tengelyre,
b) az y tengelyre,
c) az origóra,
d) az origón áthaladó és az x tengely pozitív felével 45°-os szöget bezáró egyenesre,
e) a II. és a IV. síknegyedet felező és az origón áthaladó egyenesre tükrözzük.

520. Adott két helyvektor: $\mathbf{a}(a; b)$ és $\mathbf{b}(b; a)$. Hogyan helyezkednek el egymáshoz viszonyítva?

521. Egyenlő szárú háromszög alapja 10, magassága 6 hosszúságegység. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak helyvektorait, ha úgy helyezzük el a koordináta-rendszerben, hogy a kezdőpont az alap egyik végpontjában van, és az alap az x tengelyre illeszkedik. Hány megoldás van? Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha az alap 12, a szár 8 hosszúságegység. Hány megoldás van?

522. Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontja egy a oldalú négyzet középpontjában. Határozzuk meg a csúcsok helyvektorait, ha
a) a négyzet csúcsai a tengelyekre illeszkednek,
b) a négyzet oldalai párhuzamosak a tengelyekkel.

523. Határozzuk meg a szabályos hatszög csúcsainak helyvektorait, ha az oldala 1; 2; 3; 4; a; $2a$ hosszúságegység, középpontja az origóban van, és egyik csúcsa
a) az x tengelyre,
b) az y tengelyre illeszkedik.

524. Határozzuk meg a szabályos nyolcszög csúcsainak helyvektorait, ha az átlója d, és egy-egy átló a koordináta-tengelyekre illeszkedik.

525. Szerkesszük meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek
a) az abszcisszája 0,
b) az ordinátája 0,
c) az abszcisszája 2, -3,
d) az ordinátája 4, -5,
e) az abszcisszája és ordinátája egyenlő,
f) a koordinátái abszolút értékben egyenlők.

526. Az $\mathbf{a}(2;\ 3)$, $\mathbf{b}(4;\ -5)$, $\mathbf{c}(-3;\ 8)$, $\mathbf{d}\left(-5;\ -\frac{3}{3}\right)$, $\mathbf{e}(a;\ b)$, $\mathbf{f}(\sin\alpha;\ \cos\alpha)$ helyvektorokat 90°-kal elforgatjuk. Határozzuk meg az elforgatott helyvektorok koordinátáit. Írjuk fel azokat a helyvektorokat is, amelyek a megadott helyvektorokból $-90°$-os elforgatással adódnak.

KÉT VEKTOR ÖSSZEGÉNEK ÉS KÜLÖNBSÉGÉNEK, EGY VEKTOR SZÁMSZOROSÁNAK KOORDINÁTÁI. ADOTT SZAKASZT ADOTT ARÁNYBAN OSZTÓ PONT, SÚLYPONT

527. Legyen az $\mathbf{a}(3;\ 5)$; $\mathbf{b}(-4;\ 2)$; $\mathbf{c}(-2;\ -5)$; $\mathbf{d}(0;\ 3)$; $\mathbf{e}(5;\ -2)$. Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 2. $\mathbf{a}-\mathbf{c}$; 3. $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}+\mathbf{e}$; 4. $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$;

5. $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$; 6. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$; 7. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$.

Ábrázoljuk a kapott vektorokat!

528. Egy háromszög csúcsai: $A(8;\ 2)$, $B(6;\ 9)$, $C(4;\ -3)$. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ koordinátáit. Rajzoljuk meg az $\overrightarrow{AB}$-ral, $\overrightarrow{BC}$-ral és a $\overrightarrow{CA}$-ral egyenlő helyvektorokat. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ koordinátáit. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ hosszúságát.

529. Egy négyszög csúcsai: $A(6;\ 4)$, $B(-2;\ 5)$, $C(-6;\ -3)$ és $D(1;\ -8)$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ koordinátáit.

530. Állapítsuk meg a következő pontpárokkal meghatározott szakaszok felezőpontjainak koordinátáit:

a) $(6;\ 6)$ és $(2;\ 2)$;
b) $(4;\ 10)$ és $(12;\ 3)$;
c) $(-2;\ -6)$ és $(-3;\ 4)$;
d) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{4}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2};\ -4\frac{5}{6}\right)$;
e) $(\sqrt{2};\ -\sqrt{3})$ és $(-\sqrt{8};\ \sqrt{12})$;
f) $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ és $\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
g) $\left(\frac{a-b}{2};\ \frac{c-d}{2}\right)$ és $\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{c+d}{2}\right)$.

531. Az AB szakasz felezőpontja $(-1;\ -1)$. A pont koordinátái $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2};\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$. Határozzuk meg a B pont koordinátáit.

532. Felezzük meg az $A(2;\ 7)$; $B(1;\ 1)$; $C(3;\ 6)$ pontokkal adott háromszög oldalait. Igazoljuk, hogy a felezéspontok által meghatározott háromszög oldalai feleakkorák, mint az ABC háromszög oldalai. Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

533. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai az $A_1(-2;\ 1)$; $B_1(4;\ -3)$; $C_1(2;\ 3)$ pontok. Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit.

534. Határozzuk meg az $A(1;\ 2)$; $B(2;\ 6)$; $C(6;\ 4)$ csúcsokkal adott háromszög súlyvonalainak a hosszát.

535. Kössük össze a $(-3;\ 2)$ pontot az origóval. A kapott szakaszt hosszabbítsuk meg mindkét irányban önmagával. Határozzuk meg a végpontok koordinátáit. Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

536. Osszuk fel
a) az $(5;\ 0)$; $(4;\ 3)$ pontokat összekötő szakaszt $3:4$, illetve $4:3$ arányban;
b) a $(3;\ -2)$; $(10;\ 12)$ pontokat összekötő szakaszt $2:5$, illetve $5:2$ arányban.
Határozzuk meg az osztópontok koordinátáit. Hány megoldás lehetséges? (A pontok sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

537. Az $(1;\ 3)$ és $(5;\ -2)$ pontokat összekötő szakaszt harmadoljuk. Határozzuk meg az $(1;\ 3)$ ponthoz közelebb fekvő harmadoló pont koordinátáit.

538. Osszuk fel
a) a $(2;\ -2)$; $(6;\ 14)$ pontokat összekötő szakaszt négy egyenlő részre;
b) a $(3;\ 5)$; $(7;\ -2)$; pontokat összekötő szakaszt három egyenlő részre.
Határozzuk meg az osztópontok koordinátáit.

539. A $(4;\ 3)$; $(6;\ -1)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban megnyújtjuk másfélszeresére. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit.

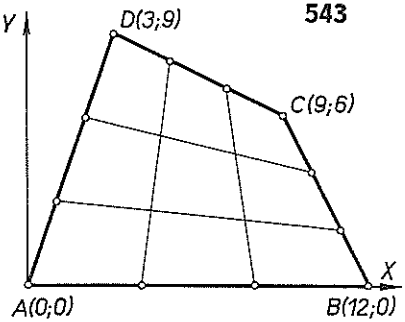
540. A $(-1;\ 4)$ és $(6;\ 2)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban megnyújtjuk négyszeresére. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit.

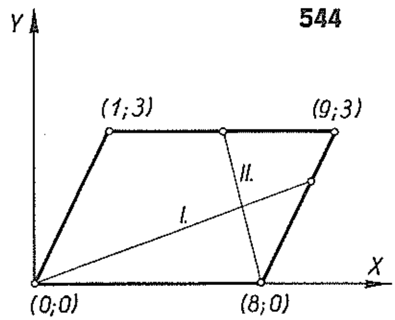
541. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának koordinátáit, ha a csúcsai:

a) $A(8;2)$; $B(4;6)$; $C(0;-2)$;
b) $A(6;2)$; $B(-4;1)$; $C(2;-3)$;
c) $A(\sqrt{2};-\sqrt{3})$; $B(-\sqrt{8};\sqrt{12})$; $C(-\sqrt{32};\sqrt{27})$;
d) $A\left(\frac{a-b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$; $B\left(\frac{a-b}{3};\frac{a+b}{3}\right)$; $C(a+b;\ a-b)$.

542. Egy háromszög csúcsai: $A(2;2)$; $B(2;4)$; $C(6;4)$. Számítsuk ki a háromszög oldalait, a súlypontjának koordinátáit.

543. Rajzoljuk meg az $A(0;0)$; $B(12;0)$; $C(9;6)$; $D(3;9)$ pontokkal meghatározott négyszöget. Harmadoljuk meg az oldalait, majd kössünk össze két-két szemközti harmadolópontot. Igazoljuk, ezek az egyenesek egyenlő darabokra vágják (szintén harmadolják) egymást (543. ábra).





544. A $(0;0)$; $(8;0)$; $(9;3)$; $(1;3)$ pontokkal meghatározott paralelogrammában kössük össze a $(0;0)$ csúcsot a $(8;0)$ és $(9;3)$ pontokkal meghatározott oldal „felső" harmadolópontjával, a $(8;0)$ csúcsot pedig az $(1;3)$ és a $(9;3)$ csúcsokat összekötő oldal felezőpontjával. Igazoljuk, hogy az így kapott első szakasz felezi a második szakaszt, ez viszont $\frac{1}{4}$ részt vág le az előbbiből (544. ábra).

545. Bizonyítsuk be, hogy az

a) $A(1;3)$; $B(4;7)$; $C(2;8)$; $D(-1;4)$;
b) $A\left(\frac{3}{2};\ 1\right)$; $B(2;5)$; $C(3;-2)$; $D\left(\frac{5}{2};-6\right)$;
c) $A(1;2)$; $B(-5;1)$; $C\left(-6;-\frac{1}{2}\right)$; $D\left(0;\frac{1}{2}\right)$

pontok paralelogrammát határoznak meg.

546. Adott a paralelogramma három csúcsa:

a) $(0;0)$; $(3;1)$; $(1;3)$;
b) $(4;2)$; $(5;3)$; $(6;-4)$;
c) $(1;4)$; $(3;2)$; $(6;5)$.

Határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit.
Hány megoldás van?

547. Egy háromszög csúcsai: $A(4; 1)$; $B(7; 5)$; $C(-4; 7)$.
Határozzuk meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekben a belső szögfelezők az oldalakat metszik.

548. Egyenes vonalú mozgást végző pont átmegy az $A(2; 6)$ és a $B(8; 1)$ ponton. Milyen pontokban metszi a pálya a koordináta-tengelyeket?

549. Egy egyenes az x tengelyből $OA = 6$, az y tengelyből $OB = 8$ hosszúságegységnyi szakaszt vág le. Határozzuk meg az OAB derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság talppontjának a koordinátáit.

550. Két kör középpontja: $O_1(2; 5)$; $O_2(7; 10)$. Sugaruk rendre: $r_1 = 3$ egység, $r_2 = 7$ egység. Határozzuk meg a két kör közös érintőinek a metszéspontját.

551. Igazoljuk koordináta-geometriai úton is, hogy
a) a derékszögű háromszög átfogójának felezéspontja egyenlő távol van a csúcsoktól;
b) a négyszög szemközti oldalainak felezőpontját összekötő szakaszok felezik egymást;
c) a négyszög oldalainak felezéspontját összekötő szakaszok paralelogrammát határoznak meg.

552. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög súlypontján áthaladó tetszőleges egyenesre a csúcsokból merőlegeseket rajzolunk, akkor az egyenes egyik oldalán levő merőleges távolság egyenlő a másik oldalon levő két merőleges távolság összegével.

553. Egy háromszög oldalait ugyanolyan forgási irányban, azonos arányban meghosszabbítjuk. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkező háromszögnek és az eredetinek közös a súlypontja.

AZ EGYENES EGYENLETEI

554. A koordináta-rendszer síkjában egy pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Az időmérés kezdetekor a (3; 4) pontban van. Sebességvektora: $\mathbf{v}(1; 1)$. Hol volt a pont az időmérés kezdete előtt 1, 2, 3 időegységgel, és hol lesz a pont az időmérés kezdete után 1; 2,5; 3; 5 időegységgel?

555. Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely áthalad a

a) $(0;\ 0)$ ponton és irányvektora $(1;\ 2)$;
b) $(0;\ 0)$ ponton és irányvektora $(2;\ -1)$;
c) $(0;\ 3)$ ponton és irányvektora $(4;\ 3)$;
d) $(-2;\ 0)$ ponton és irányvektora $(-3;\ 2)$;
e) $(3;\ 1)$ ponton és irányvektora $(3;\ 2)$;
f) $\left(4\frac{5}{6};\ \frac{3}{4}\right)$ ponton és irányvektora $(1;\ -0{,}5)$;
g) $\left(5\frac{2}{3};\ -3{,}5\right)$ ponton és irányvektora $(-5;\ 4)$;

h) $\left(-0{,}5;\ -\frac{3}{4}\right)$ ponton és irányvektora $(-1;\ 1)$.

Szerkesszük meg az egyeneseket.

556. Mi az egyenlete annak egyenesnek, amely áthalad az

a) $(0;\ 0)$ ponton és irányvektora $(2;\ 3)$;
b) $(-2;\ 1)$ ponton és irányvektora $(3;\ \sqrt{3})$;
c) $(4;\ 0)$ ponton és irányvektora $(-1;\ \sqrt{3})$;
d) $(3;\ -2)$ ponton és irányvektora $(1;\ 1)$;
e) $(3;\ 5)$ ponton és irányvektora $(-1;\ 1)$;
f) $\left(-4\frac{1}{2};\ -3\frac{1}{4}\right)$ ponton és irányvektora $(5;\ -2)$;
g) $(\sqrt{2};\ -\sqrt{3})$ ponton és irányvektora $(1;\ -1)$;
h) $(5;\ -4)$ ponton és irányvektora $(0;\ 4)$;
i) $(-1;\ -3)$ ponton és irányvektora $(1;\ \sqrt{3})$;
j) $(-2;\ -8)$ ponton és irányvektora $(5;\ 2)$.

557. Állapítsuk meg, hogy rajta van-e (vannak-e)

a) az $x-y=1$ egyenesen a $(7;\ 6)$ pont;
b) a $2x-y=3$ egyenesen az $(1;\ 1)$ pont;
c) az $\frac{x}{2}+y=1$ egyenesen a $(2;\ 0)$ pont;
d) a $4x+y=6$ egyenesen az $(1;\ 2)$; $(2;\ -1)$; $(4;\ -10)$ pontok;
e) a $2x-3y+4=0$ egyenesen az $(1;\ 3)$; $(-2;\ 0)$; $(7;\ 6)$; $(10;\ 8)$ pontok.

558. Határozzuk meg az A és a B értékét úgy, hogy *a)* a $(3;\ -2)$ és a $(4;\ 2)$, *b)* a $(7;\ 2)$ és az $(1;\ -2)$ pontok az $Ax+By=1$ egyenesre illeszkedjenek.

559. Mely pontokban metszi a koordináta-rendszer tengelyeit az

a) $x-5y=-10$;
b) $7x-9y=-1$;
c) $2x-3y=5$;
d) $6x-4y=-8$;
e) $x-3y=-2$;
f) $x-5y=-6$;
g) $7x-9y=-63$;
h) $x+y=0$

egyenes?

560. Adjunk meg 3 pontot, amelyek a $2x-7y=-3$ egyenesre illeszkednek.

561. Határozzuk meg a $4x+3y=6$ egyenesnek azokat a pontjait, amelyek az x tengelytől $+6$, illetve -6 egységnyi távolságra vannak.

562. Az $5x-3y=-15$ egyenesen határozzuk meg azt a pontot, amelynek az x tengelytől mért távolsága $\frac{2}{3}$ része az y tengelytől mért távolságának.

563. Határozzuk meg k értékét úgy, hogy a $2x-y=k$ egyenes áthaladjon *a)* a $(4;\ 1)$ ponton; *b)* a $(-2;\ -3)$ ponton; *c)* az origón.

564. Határozzuk meg m értékét úgy, hogy az $mx-y=-3$ egyenes áthaladjon

a) az $(1;\ 4)$ ponton; *b)* a $(-2;\ 2)$ ponton; *c)* a $(-\sqrt{3};\ -\sqrt{2})$ ponton; *d)* a $(0;\ -4)$ ponton; *e)* a $(3;\ 0)$ ponton; *f)* az origón.

565. Egy egyenes áthalad a $(-4;\ 2)$ ponton és irányvektora $(3;\ \sqrt{3})$. Határozzuk meg az egyenesre illeszkedő olyan P pontnak az abszcisszáját, amelynek az ordinátája 6.

566. Írjuk fel

a) a $(2;\ 4)$ ponton áthaladó,
b) a $(-1;\ 3)$ ponton áthaladó,
c) a $(-2;\ -1)$ ponton áthaladó,
d) a $(0;\ 0)$ ponton áthaladó

és a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos egyenesek egyenletét.

567. Írjuk fel a $(4;\ 5)$ ponton áthaladó egyenesek egyenletét. Ezek közül melyik halad át az origón, és melyik párhuzamos az x, illetve az y tengellyel?

568. Adjuk meg az alábbi pontpárokon áthaladó egyenesek egyik irányvektorát:

a) $(7;\ 8)$ és $(0;\ 0)$;
b) $(2;\ 3)$ és $(9;\ 5)$;
c) $(2;\ 1)$ és $(-1;\ 4)$;
d) $(3;\ -4)$ és $(1;\ 2)$;
e) $(-7;\ -5)$ és $(-3;\ 0)$;
f) $(-4;\ -3)$ és $(2;\ 5)$;
g) $(3;\ 2)$ és $(8;\ 1)$;
h) $\left(\frac{1}{4};\ -\frac{1}{2}\right)$ és $\left(-3;\ -\frac{1}{3}\right)$;
i) $\left(2\frac{3}{4};\ 7\frac{5}{6}\right)$ és $\left(-2\frac{1}{8};\ -1\frac{4}{5}\right)$;
j) $\left(\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\sqrt{3}\right)$;
k) $(-3{,}4;\ 8{,}2)$ és $(5{,}6;\ -1{,}3)$;
l) $(x_1;\ y_1)$ és $(x_2;\ y_2)$.

569. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az origón és a

a) $(4;\ 3)$; *b)* $(5;\ -2)$; *c)* $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right)$; *d)* $(3{,}1;\ 4{,}6)$; *e)* $(-1{,}8;\ 10{,}8)$;

f) $(a;\ b)$; *g)* $(-a;\ b)$; *h)* $(a;\ -a)$; *i)* $(a;\ -b)$ ponton.

570. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a következő két ponton:

a) $(9;\ 6)$ és $(4;\ 3)$;
b) $(4;\ 6)$ és $(-3;\ -1)$;
c) $(-2;\ -3)$ és $(4;\ -1)$;
d) $(4;\ 5)$ és $(0;\ 0)$;
e) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$;
f) $(-2{,}5;\ -1{,}3)$ és $(2{,}5;\ -4{,}3)$;

g) $(0{,}8;\ 1{,}2)$ és $(1{,}2;\ 0{,}2)$;

h) $\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$ és $\left(-4;\ \frac{1}{3}\right)$;

i) $(3;\ 4)$ és $(8;\ 4)$;

j) $\left(0;\ \frac{3}{5}\right)$ és $\left(0;\ -\frac{5}{2}\right)$;

k) $(0;\ 8)$ és $(-3;\ 0)$;

l) $(a;\ a)$ és $(b;\ b)$;

m) $(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$ és $(3\sqrt{2};\ -2\sqrt{3})$.

571. Igazoljuk, hogy a $P_1(x_1;\ y_1)$ és a $P_2(x_2;\ y_2)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete:

$$(x_2-x_1)(y-y_1) = (y_2-y_1)(x-x_1).$$

Írjuk fel az egyenes egyenletét azokban a speciális esetekben is, amikor az $x_1 = x_2$ vagy az $y_1 = y_2$.

572. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek tengelymetszetei:

a) $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$; *d)* $-\frac{a}{2}$ és $-\frac{b}{3}$; *g)* $\frac{a}{0{,}3}$ és $\frac{b}{1{,}7}$;

b) -3 és 4; *e)* $\frac{2}{3}$ és 4; *h)* a és a;

c) 5 és -6; *f)* $\frac{4}{3}$ és $\frac{4}{5}$; *i)* a és $-a$.

(Ha az egyenes metszi a koordináta-rendszer tengelyeit vagy azok valamelyikét, akkor az x tengelyből kimetszett pont a abszcisszáját és az y tengelyből kimetszett pont b ordinátáját az egyenes tengelymetszeteinek mondjuk.)

573. Igazoljuk, hogy a $P_1(a;\ 0)$ és a $P_2(0;\ b)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1,$$

ahol $a \neq 0$ és $b \neq 0$. (a-t és b-t az egyenes tengelymetszeteinek, a felírt egyenletet az egyenes tengelymetszetes egyenletének nevezzük.)

574. Egy rombusz átlóinak a hossza 10 és 8 egység. Írjuk fel az oldalainak az egyenletét, ha az átlók a koordináta-rendszer tengelyeire illeszkednek.

575. Ábrázoljuk a tengelymetszetek segítségével a következő egyeneseket:

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4} = 1$; *b)* $\frac{x}{2}-\frac{y}{4} = 1$; *c)* $x+\frac{y}{3} = 1$;

d) $3x+\frac{y}{2} = 1$; *e)* $3x-\frac{y}{3} = 1$; *f)* $x+y = 1$.

Adjuk meg az egyenesek egyik irányvektorát, és írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét is.

576. Számítsuk ki az alábbi egyenesek tengelymetszeteit:

a) $3x+2y=6$; *b)* $8x+5y=40$; *c)* $6x-4y=24$;
d) $2x+3y=-6$; *e)* $4x-5y+20=0$; *f)* $3x-2y+4=0$;
g) $x+3y-5=0$; *h)* $4x+5y+1=0$; *i)* $Ax+By+C=0$;
j) $5x=3y-15$; *k)* $y=-x+3$; *l)* $y=\frac{2}{5}x-3$;
m) $7x-5y=0$; *n)* $2x+3y=0$.

Adjuk meg az egyenesek egyik irányvektorát, és írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét is.

577. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelyet

a) a $4x+3y=24$; *b)* a $\frac{3x-y}{2}=\frac{4y-5}{3}$; *c)* az $y=\frac{3}{2}x-3$ egyenes

zár be a koordinátatengelyekkel?

578. Mekkora szakaszt vágnak le a tengelyek *a)* a $12x-5y+60=0$; *b)* a $3x-2y+4=0$; *c)* az $5x-3y+4=0$; *d)* a $2x-3y+6=0$ egyenesekből?

579. Egy egyenes úgy mozog, hogy a koordináta-rendszer tengelyeiből lemetszett szeletek reciprok értékeinek összege állandó. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egyenes egy rögzített pont körül forog.

580. Egy egyenes áthalad *a)* a $(4;\ 2)$; *b)* a $(-2;\ 1)$; *c)* a $(-5;\ -2)$ ponton, és tengelymetszeteinek abszolút értéke egyenlő. Határozzuk meg az egyenes egyenletét.

581. Egy egyenes áthalad a $(3;\ -2)$ ponton, és a koordináta-rendszer tengelyeit a $P_1(a;\ 0)$ és a $P_2(0;\ b)$ pontokban metszi. Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha kikötjük azt, hogy $|b|=3|a|$ legyen. Hány megoldás van?

582. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik áthalad a $(4;\ 1)$ ponton, és a tengelymetszeteinek összege 9 hosszúságegység.

583. Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha tengelymetszetei a és b, áthalad

a) a $(6;\ -1)$ ponton és $|ab|=1$;

b) a $(-4;\ 1)$ ponton, és a tengelyekkel alkotott háromszög területe: $\frac{1}{2}|ab|=1$;

c) a $P(u;\ v)$ ponton és a tengelyekkel alkotott háromszög területe: $\frac{1}{2}|ab|=t$, ahol t adott pozitív szám. Mi a megoldhatóság feltétele? Hány megoldás lehetséges?

584. Írjuk fel *a)* a $(4;\ 6)$; *b)* $(-3;\ 2)$ ponton áthaladó egyenesek közül annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek a koordináta-rendszer tengelyei közé eső szakaszát az adott pont felezi.

585. Határozzuk meg annak a pontnak a koordinátáit, amely az $A(-4;\ -3)$, $B(-1;\ 4)$ pontokon áthaladó egyenesre illeszkedik és abszcisszája 2.

586. Egy egyenes áthalad a $(7;\ 4)$ ponton, és a -1 abszcisszájú pontja felezi az egyenesnek a $(7;\ 4)$ és az x tengely közötti szakaszát. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

587. Egy szabályos hatszög középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja, a hatszög egyik csúcsa a $(6;\ 0)$ pont. Írjuk fel az oldalak egyenletét.

588. Írjuk fel a háromszög súlyvonalainak és középvonalainak egyenletét, ha csúcsai:

a) $A(3;\ 7)$, $B(1;\ 1)$, $C(8;\ -4)$;
b) $A(2;\ 3)$, $B(-4;\ -2)$, $C(6;\ -6)$.

589. A koordináta-rendszer tengelyei és a $bx+ay=ab$ egyenes háromszöget határoznak meg ($a \neq 0$ és $b \neq 0$). Írjuk fel a súlyvonalak és a középvonalak egyenletét.

590. Bizonyítsuk be, hogy

a) az $(1;\ -9)$; $(7;\ 6)$ és $(3;\ -4)$;
b) a $(0;\ 2)$; $(4;\ 1)$ és $(16;\ -2)$

pontok egy egyenesre illeszkednek.

591. Vizsgáljuk meg, hogy egy egyenesre illeszkedik-e a következő három pont:

a)	$(-2;\ -8)$;	$(1;\ -7)$;	$(10;\ -4)$;
b)	$(3;\ 8)$;	$(5;\ 4)$;	$(6;\ 2)$;
c)	$(3;\ -5)$;	$(-2;\ 4)$;	$(8;\ -14)$;
d)	$(3;\ -4)$;	$(2;\ 0)$;	$(4;\ -1)$;
e)	$(3;\ 1)$;	$(4;\ 2)$;	$(0;\ -2)$.

592. Mi a feltétele annak, hogy az $(a;\ b)$, $(b;\ a)$, $(2a;\ -b)$ pontok egy egyenesre illeszkedjenek?

593. Írjuk fel az $A(1;\ 6)$ ponton áthaladó olyan egyenesnek az egyenletét, amely a $B(1;\ 1)$ és $C(3;\ 5)$ pontok között halad, és tőlük egyenlő távolságra van. Mekkora ez a távolság?

594. Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja az origóban van, alapja az $y=-2$ egyenesre illeszkedik, az alapon fekvő szögei $30°$-osak. Írjuk fel hiányzó két oldalának az egyenletét, és határozzuk meg a csúcsainak koordinátáit.

595. Valamely háromszög egyik oldalegyenesének az egyenlete: $2x-3y-9=0$. Az oldal végpontjainak abszcisszája: $x_1=3$; $x_2=9$. A háromszög súlypontja $(5;\ 4)$. Mekkorák az oldalak és a szögek?

596. Milyen szög alatt kell az $A(5;\ 4)$ pontból fénysugarat ejteni az x tengelyre, hogy az x tengelyről visszavert fénysugár áthaladjon a $B(-2;\ 3)$ ponton?

597. Az $A(-2;\ 3)$ pontból fénysugár esik az x tengelyre. A fénysugár irányszöge $60°$. A sugár az x tengelyről visszaverődik. Határozzuk meg a beeső és a visszavert fénysugár által meghatározott egyenesek egyenletét.

598. Határozzuk meg a koordináta-rendszer x tengelyén a P pontot úgy, hogy az APB törött vonal hossza a lehető legrövidebb legyen, ha $A(-4;\ 8)$ és $B(2;\ 4)$.

599. Egy adott egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektort az egyenes **normálvektorának** mondunk.
Írjuk fel

a) az $(5;\ 2)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-1;\ 4)$ normálvektorú,
b) a $(-4;\ 8)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(3;\ -2)$ normálvektorú,
c) a $(-6;\ -4)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-2;\ -4)$ normálvektorú,
d) a $(0;\ 0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-5;\ 2)$ normálvektorú

egyenes egyenletét.

600. Határozzuk meg az alábbi egyenesek egyik irányvektorát és egyik normálvektorát:

a) $y-x=0$; *b)* $x-y=-3$; *c)* $2x-y=4$;

d) $3x-y=1$; *e)* $2x+y=-1$; *f)* $\frac{2}{3}x+y=2$;

g) $\frac{4}{3}x-y=-5$; *h)* $\frac{1}{2}x-y=4$; *i)* $\frac{x}{3}-y=-1$;

j) $\frac{x}{4}+y=-2$; *k)* $3x+2y=10$; *l)* $abx+(a^2+b^2)y=0$.

Ábrázoljuk az egyeneseket a normálvektor, illetve az irányvektor segítségével.

601. Egy mozgó pont koordinátáit az

$x=a\cos^2 t, \qquad y=a\sin^2 t$

egyenletek határozzák meg, ahol t az idő és $a>0$. Milyen pályán mozog a pont?

602. λ milyen értéke mellett jelent a

$\lambda x^2+4xy+y^2-4x-2y-3=0$

egyenlet egyenespárt?

KÉT EGYENES METSZÉSPONTJA

603. Egy személyautó délben indul egyenes útvonalon A helységből a 300 km-re fekvő B helységbe 40 km/óra átlagsebességgel. Egy másik személyautó 2 óra múlva indul A helységből az első autó útvonalán 60 km/óra átlagsebességgel. Állapítsuk meg grafikusan és számítással is, hogy mikor és hol éri utol a második autó az elsőt!

604. Egy személyautó délben indul A helységből a 400 km-re fekvő B helységbe 50 km/óra átlagsebességgel. Egy személyautó 13 órakor indul 40 km/óra átlagsebességgel B-ből A felé. Állapítsuk meg grafikusan és számítással is, hogy mikor és hol találkoznak!

605. Számítsuk ki az

a) $y=x+3$ és az $y=-x-8$;

b) $y=\frac{x}{2}-2$ és az $y=-2x+5$;

c) $x+2y=12$ és az $5x-3y=-5$;

d) $3x+y+7=0$ és az $x-4y-2=0$;

e) $2x+7y-8=0$ és a $9x-4y+35=0$;

f) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ és az $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$;

g) $\frac{y-1}{x-1}=3$ és az $\frac{y-2}{x-1}=2$;

h) $y = ax+b$ és az $y = cx+d$;

i) $y = ax+b$ és az $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$

egyenesek metszéspontját.

606. Valamely háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

a) $4x-5y = -13$;	$7x+2y = 31$;	$3x+7y = 1$;
b) $y = 3x-4$;	$x-4y = 4$;	$2x+y = 3$;
c) $y = 2x+3$;	$\frac{x}{4}-\frac{y}{5} = 1$;	$3x+5y+10 = 0$.

Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

607. Valamely háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

a) $x+1 = 0$;	$y-x+2 = 0$;	$y+x-5 = 0$;
b) $x+y-2 = 0$;	$3x-5y-14 = 0$;	$x-y-2 = 0$.

Számítsuk ki a háromszög kerületét és területét.

608. Valamely háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

a) $5x-3y = 1$;	$5x+y = 13$;	$15x-y = 67$;
b) $x+y = 11$;	$2x = 3y-18$;	$x = 4y-19$.

Számítsuk ki a háromszög oldalait, szögeit, területét, a köré írható kör sugarát és súlypontjának a koordinátáit.

609. Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelynek oldalai az $y = -8x+15$; $y = 2x-7$ egyenesekre és az x tengelyre illeszkednek. Forgassuk meg a háromszöget az x tengely körül. Számítsuk ki a keletkező kettős kúp térfogatát és felszínét.

610. Állapítsuk meg, hogy az alábbiak közül melyik három egyenesnek van közös metszéspontja:

a) $3x-4y+9 = 0$;	$x+2y+4 = 0$;	$5x-7y+6 = 0$;
b) $4x-6y+15 = 0$;	$5x+4y+13 = 0$;	$x+12y-3 = 0$;
c) $3x-y-1 = 0$;	$2x-y+3 = 0$;	$x-y+1 = 0$;
d) $x+3y-1 = 0$;	$5x+y-10 = 0$;	$3x-5y-8 = 0$.

611. Három egyenes közül az első áthalad az origón és irányvektora $(1;\ 1)$, a második tengelymetszetei 2 és 5, a harmadik áthalad az $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ és $(-2;\ 2)$ pontokon. Van-e közös pontja a három egyenesnek?

612. Bizonyítsuk be, hogy az $ax+by = 1$, $bx+ay = 1$ és $x-y = 0$ egyeneseknek csak egy közös pontja van. Milyen kikötést kell tennünk a-ra és b re?

613. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az

$$a_1x+b_1y+c_1 = 0;\ a_2x+b_2y+c_2 = 0;\ a_3x+b_3y+c_3 = 0$$

egyenesek egy pontban messék egymást?

614. Valamely háromszög csúcsai: $(-3;\ 4)$; $(1;\ 8)$; $(5;\ 2)$. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

615. Számítsuk ki a négyszög területét, ha oldalai a következő egyenesekre illeszkednek:

a) $x-2y-3=0$; $2x+y+2=0$;
$2x+y+4=0$; $x-2y+4=0$;
b) $5x-2y+23=0$; $x+6y-21=0$;
$3x+2y-15=0$; $x-10y-5=0$;
c) $y=3x+2$; $3y=2x+6$; $4x+y=16$; $5y=x-4$.

616. Egy négyszög két szomszédos oldalegyenesének egyenlete: $3x-4y=8$ és $x+2y=16$. A metszéspontjukkal szemközti csúcs az origó. A másik két csúcsot összekötő átló egyenesének egyenlete: $3x+y=13$. Számítsuk ki a négyszög területét.

617. Legyen $A_1=a_1x+b_1y+c_1=0$
$A_2=a_2x+b_2y+c_2=0$.

Bizonyítsuk be, hogy az $A_1+\lambda A_2=0$ olyan egyenesnek az egyenlete, amely áthalad az $A_1=0$ és az $A_2=0$ egyenesek metszéspontján. (Kikötjük, hogy a két adott egyenes ne legyen párhuzamos.)

618. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad
a) a $3x-y+2=0$ és az $x+2y-3=0$ egyenesek metszéspontján és az $(1; 2)$ ponton;
b) a $2x+3y+1=0$ és a $6x-5y-3=0$ egyenesek metszéspontján és a $(-2; -2)$ ponton;
c) a $3x-4y+13=0$, $11x+7y-104=0$ és a $4x-y+7=0$, $3x-y+5=0$ egyenespárok metszéspontján.

619. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely
a) áthalad az $x-3y-6=0$ és a $4x+y=0$ egyenesek metszéspontján és irányvektora $(1; -3)$;
b) áthalad a $2x+3y+1=0$ és a $6x-5y-3=0$ egyenesek metszéspontján és irányvektora $(1; 2)$.

620. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad
a) a $3x+4y=23$ és a $6x-7y=16$ egyenesek metszéspontján, és az y tengelyből 3 egységet vág le;
b) a $4x-7y+39=0$ és az $5x+4y-15=0$ egyenesek metszéspontján, és az x tengelyből -4 egységet vág le.

621. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $3x-2y+4=0$ egyenes -3 ordinátájú pontján, és az x tengelyt az origótól ugyanolyan távolságban metszi, mint az adott egyenes az y tengelyt.

622. Hogyan kell az m értékét megválasztani úgy, hogy az $y=mx+4$ egyenes áthaladjon a $2x-y+1=0$ és az $y=x+5$ egyenesek metszéspontján?

623. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $2x-6y+5=0$ és a $2x-4y+3=0$ egyenesek metszéspontján, és az első egyenessel 45°-os szöget zár be.

624. Az $y=-x+b$ egyenesnél határozzuk meg b értékét úgy, hogy az egyenesből a $-x+2y=6$, $5x-y=2$ egyenesek egységnyi hosszúságú szakaszt vágjanak ki.

625. Az $y=-\frac{3}{4}x+b$ egyenesnél határozzuk meg b értékét úgy, hogy az

egyenesből az $5x-4y=0$ és az $x-4y=0$ egyenesek 5 hosszúság-egységnyi szakaszt vágjanak ki.

626. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek a $3x-5y=6$ és a $4x+y+6=0$ egyenesek közötti szakaszát az origó felezi.

627. Igazoljuk, hogy az y tengely, az $y=mx+b$ és az $y=m_1x+b_1$ egyenesek olyan háromszöget határolnak, amelynek a területe:

$$t=\left|\frac{(b-b_1)^2}{2(m-m_1)}\right|.$$

628. Adott két egyenes: $x-3y=-9$, $8x+3y=36$. E két egyenes a koordinátatengelyek pozitív részeivel egy négyszöget zár be, amelynek a területe t. Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely a két egyenes metszéspontján halad át, és a koordinátatengelyekkel olyan háromszöget alkot, amelynek a területe $2t$?

629. Az $x-y=0$ egyenesen rögzítsünk egy pontot. Ezen a ponton át két tetszőleges egyenest húzunk. Ezek az x tengelyt A_1 és A_2, az y tengelyt B_1 és B_2 pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az A_1B_2 és az A_2B_1 egyenesek az $x+y=0$ egyenesen metszik egymást, ha $OA_1\neq OB_2$.

630. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen értéket is adunk m-nek, az $mx+3y-4m+1=0$ egyenesek a sík egy rögzített pontján haladnak át.

631. Bizonyítsuk be, hogy az

$$(m^2+6m+3)x-(2m^2+18m+2)y-3m+2=0$$

egyenesek mindig ugyanazon a ponton haladnak át, bármilyen értéket adunk is az m-nek.

632. Az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ és $\overrightarrow{A_2B_2}$ azonos irányúak. Az A_1A_2 és a B_1B_2, az A_2A és a B_2B, az AA_1 és a BB_1 egyenespárok metszéspontjai rendre C, C_1 és C_2. Bizonyítsuk be, hogy a C, C_1, C_2 pontok egy egyenesre illeszkednek.

633. Rajzoljunk egy derékszögű háromszög mindegyik befogója fölé kifelé egy-egy négyzetet, azután az átfogó végpontjait kössük össze a szemközti befogóra rajzolt négyzetnek a kiszemelt csúcstól legtávolabb levő csúcsával. Bizonyítsuk be, hogy az így adódó két egyenes metszéspontja az átfogóhoz tartozó magasságvonalra illeszkedik.

PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES EGYENESEK

634. Számítsuk ki az egyenes iránytangensét és irányszögét, ha irányvektora

a) $\mathbf{v}(1;\sqrt{3})$; *b)* $\mathbf{v}(1;-\sqrt{3})$; *c)* $\mathbf{v}(3;\sqrt{3})$; *d)* $\mathbf{v}(-\sqrt{3};1)$;

e) $\mathbf{v}(1;-1)$; *f)* $\mathbf{v}(1;2)$; *g)* $\mathbf{v}(5;7)$; *h)* $\mathbf{v}(-1;0{,}49)$.

635. Adjuk meg az egyenes egyik irányvektorát, ha az irányszöge

a) 45°; *b)* 30°; *c)* 60°; *d)* 135°; *e)* 150°; *f)* 120°; *g)* 10°; *h)* 142°; *i)* 48°; *j)* 123°24′.

636. Határozzuk meg az egyenes iránytangensét, ha az egyenlete:

a) $2x-y=0$;
b) $x-y=0$;
c) $2x-3y=0$;
d) $x+2y=0$;
e) $3x+4y=0$;
f) $\sqrt{3}x+y=0$;
g) $3x+y=0$;
h) $x-y=-4$;
i) $2x-3y=15$;
j) $2x+3y=12$;
k) $x+y=2$;
l) $3x+y=-4$;
m) $1{,}2x+y=3{,}6$;
n) $\frac{5}{6}x-y=2{,}1$;
o) $\frac{x}{4}+y=\frac{4}{5}$.

637. Írjuk fel az egyenes iránytényezős egyenletét, azután ábrázoljuk az egyenest az y tengellyel való metszéspont és az iránytényező segítségével:

a) $x+y=1$;
b) $x-y=5$;
c) $3x+y=4$;
d) $3x-2y=8$;
e) $5x+3y=12$;
f) $4y-8=0$;
g) $3x+12=0$;
h) $4x-2y=7$;
i) $2x-3y+6=0$;
j) $x-3y-9=0$;
k) $3x-y-2=0$;
l) $5x+4y+8=0$;
m) $x+5y-6=0$;
n) $-4x+2y+8=0$;
o) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-\frac{1}{6}=0$;
p) $\frac{x-y}{3}+\frac{y-2x}{2}-\frac{1}{4}=0$.

638. Állapítsuk meg ábrázolás nélkül, hogy a következő egyenespárok közül melyek párhuzamosak egymással, és melyek merőlegesek egymásra:

a) $x+2y=6$ és $x+2y=4$;
b) $2x-y=4$ és $2x-y=-1$;
c) $x+2y=6$ és $-2x+y=3$;
d) $\sqrt{2}x+y=5$ és $\sqrt{2}x-2y=6$;
e) $3x+5y=1$ és $y=-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$;
f) $2x+3y=5$ és $y=\frac{3}{2}x-6$;
g) $4x-5y=12$ és $8x-10y=7$;
h) $5x-6y=30$ és $12x+10y=8$.

639. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy

a) az $y=\frac{p}{2}x+1$ és az $y=4x-8$;
b) az $y=\frac{p}{3}x-4$ és az $y=\frac{12}{p}x+3$;
c) a $2x-5y=3$ és a $3px+y=1$;
d) a $3x-4y=5$ és a $2x+3py=0$;
e) a $3px-8y+13=0$ és a $(p+1)x-2py-20=0$

egyenesek párhuzamosak legyenek egymással.

640. Adott a következő három egyenes:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1; \quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1 \quad \text{és} \quad \frac{x}{a+a'}+\frac{y}{b+b'}=\frac{1}{2}.$$

Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a három egyenes párhuzamos legyen?

641. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy

a) az $y=x+2$ egyenes merőleges legyen az $y=px+1$ egyenesre;

b) az $y=\frac{a}{b}x-4$ egyenes merőleges legyen az $y=-px+2$ egyenesre;

c) a $\sqrt{3}x+p\sqrt{2}y=5$ egyenes merőleges legyen a $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5$ egyenesre;

d) a $2x-5y+3=0$ egyenes merőleges legyen a $3px+y-2=0$ egyenesre;

e) a $(3p+2)x+(1-4p)y+8=0$ egyenes merőleges legyen az $(5p-2)x+(p+4)y-4=0$ egyenesre.

642. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad

a) a $(3;\ 4)$ ponton és párhuzamos az $y=2x-3$ egyenessel;

b) a $(2;\ -3)$ ponton, és párhuzamos a $3x-5y=15$ egyenessel;

c) a $\left(-3\frac{1}{4};\ 2\frac{2}{3}\right)$ ponton, és párhuzamos a $4x-3y-12=0$ egyenessel;

d) a $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ponton, és párhuzamos a $(-1;\ 3)$ irányvektorú egyenessel;

e) a $(3{,}5;\ -2{,}1)$ ponton, és párhuzamos a $(2;\ -3)$ irányvektorú egyenessel;

f) az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ponton, és párhuzamos az $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ egyenessel.

643. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad

a) az origón, és merőleges az $y=\frac{5}{7}x-5$ egyenesre;

b) az origón, és merőleges az $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ egyenesre;

c) a $(2;\ 3)$ ponton, és merőleges az $y=x-4$ egyenesre;

d) az $(5;\ 2)$ ponton, és merőleges az $y=\frac{2}{3}x-1$ egyenesre;

e) a $(0;\ -4)$ ponton, és merőleges a $3x+4y=12$ egyenesre;

f) a $(-2;\ 3)$ ponton, és merőleges a $7x-5y-7=0$ egyenesre;

g) az x tengely 3 abszcisszájú pontján, és merőleges a $2x-5y=10$ egyenesre;

h) az y tengely $-4{,}2$ ordinátájú pontján, és merőleges a $3x+4y+1=0$ egyenesre;

i) a $\left(4\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4}\right)$ ponton, és merőleges a $2x-3y=4$ egyenesre;

j) a $(4;\ -1)$ ponton, és merőleges a $(-3;\ 2)$ irányvektorú egyenesekre;

k) a $(-4;\ -2)$ ponton, és merőleges a $(4;\ 0)$ irányvektorú egyenesekre;

l) a $4x+3y+11=0$ egyenes $x=1$ abszcisszájú pontján, és az adott egyenesre merőleges.

644. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad

a) az $(1;\ 5)$ ponton, párhuzamos, illetve merőleges a $(4;\ -2)$ és az $(5;\ 3)$ pontokon áthaladó egyenesre;

b) a $(3;\ -4)$ ponton, párhuzamos, illetve merőleges a $(6;\ 4)$ és a $(-2;\ -3)$ pontokon áthaladó egyenesre;

c) az $(5;\ 0)$ ponton, párhuzamos, illetve merőleges a $(-2;\ -4)$ és a $(-3;\ -2)$ pontokon áthaladó egyenesre;

d) a $(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$ ponton, párhuzamos, illetve merőleges a $(4;\ 5)$ és a $(-3;\ 5)$ pontokon áthaladó egyenesre.

645. Egy egyenes áthalad a $\left(3\frac{2}{5};\ -3\right)$ és az $\left(x;\ 4\frac{1}{3}\right)$ pontokon, és merőleges az $y-4x+3=0$ egyenesre. Számítsuk ki a második pont ismeretlen abszcisszáját.

646. Egy egyenes áthalad a $(-6;\ 4)$ és a $(4;\ y)$ pontokon, és párhuzamos a $4x+3y=5$ egyenessel. Számítsuk ki a második pont ismeretlen ordinátáját.

647. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $x+2y-12=0$ és a $4x-3y+7=0$ egyenesek metszéspontján, és párhuzamos, illetve merőleges az $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ egyenesre.

648. Mely pontban metszi a kezdőponton áthaladó és az $y=-2x+3$ egyenessel párhuzamos egyenes az $x+2y=4$ egyenest?

649. Határozzuk meg az e és az f egyenesek metszéspontját és hajlásszögét, ha

a) az e egyenes párhuzamos az $x-3y+5=0$ egyenessel, és áthalad a $(-1;\ 0)$ ponton; az f egyenes áthalad a $(3;\ 7)$ ponton, és merőleges az $x-y-1=0$ egyenesre;

b) az e egyenes áthalad a kezdőponton és az $x+y-2=0$, $3x-y+7=0$ egyenesek metszéspontján; az f egyenes áthalad a $(3;\ -5)$ ponton, és merőleges a $2x-3y-8=0$ egyenesre.

650. Határozzuk meg annak a szakasznak a középpontját, amelynek az egyik végpontja:

a) a $(-4;\ 3)$ pont, a másik pedig ezen a ponton áthaladó és az $5x-3y=7$ egyenessel párhuzamos egyenesnek az y tengelyre illeszkedő pontja;

b) a $(6;\ 4)$ pont, a másik pedig ezen a ponton áthaladó és a $4x+3y=8$ egyenesre merőleges egyenesnek az x tengelyre illeszkedő pontja.

651. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely

a) a $(-5;\ -2)$ és a $(-3;\ 4)$;

b) a $(4;\ 1)$ és az $(5;\ -3)$

pontokat összekötő szakaszt merőlegesen felezi.

652. Igazoljuk, hogy a $(7;\ -14)$ pont a $(-3;\ 1)$ és a $(13;\ 3)$ pontokat összekötő szakasz felező merőlegesére illeszkedik.

653. Határozzuk meg

a) a $-5x+4y+28=0$ egyenesnek azt a pontját, amely az $(1;\ 5)$ és a $(7;\ -8)$ pontoktól;

b) a $2x+3y-6=0$ egyenesnek azt a pontját, amely a (3; 3) és a (6; 2) pontoktól;

c) az $x+2y=12$ egyenesnek azt a pontját, amely a (4; 4) és a (6; −4) pontoktól egyenlő távolságra van.

654. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $3x-4y=12$ egyenes tengelyek közé eső szakaszának a felezéspontján, és merőleges az adott egyenesre.

655. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai:

a) az $A(2;\ 1)$; a $B(5;\ 3)$ és a $C(3;\ -4)$ pontok;

b) az $A(2;\ 4)$; a $B(14;\ 8)$ és a $C(6;\ 16)$ pontok.

Határozzuk meg a háromszög oldalainak az egyenletét és csúcsainak a koordinátáit.

656. Húzzunk

a) a (7; 11) ponton át olyan egyenest, amely a (3; 4) és a (9; 5) pontoktól;

b) a (7; 10) ponton át olyan egyenest, amely a (4; 5) és a (−4; −3) pontoktól;

c) az (1; 2) ponton át olyan egyenest, amely a (2; 3) és a (−4; −5) pontoktól egyenlő távolságra van.

657. Bizonyítsuk be, hogy az (1; 3), (6; 5), (5; −7) pontok derékszögű háromszöget határoznak meg.

658. Adjunk meg a $8x+5y-40=0$ egyeneshez másik kettőt úgy, hogy a három egyenes egyenlő szárú derékszögű háromszöget határozzon meg. Az átfogó az adott egyenesre illeszkedik.

659. Egy derékszögű háromszög átfogóegyenesének egyenlete $y=3x-5$. Egyik befogóegyenesének egyenlete $x+y-5=0$, és az ezzel szemközti csúcs abszciszája 4. Határozzuk meg az átfogóhoz tartozó magasságvonal egyenletét.

660. Egy derékszögű, egyenlő szárú háromszög egyik befogóegyenesének egyenlete $x-2y+9=0$. A szemközti csúcs (3; −4). Határozzuk meg az átfogóhoz tartozó magasságvonal egyenletét és a magasság hosszát.

661. Az $ax+by=a^2+b^2$ egyenesre a koordináta-rendszer kezdőpontjából merőlegest állítunk. Határozzuk meg a merőleges talppontjának a koordinátáit.

662. Adott két pont: $A(-4;\ 2)$, $B(2;\ -6)$. Határozzuk meg az y tengelyen az M pontot úgy, hogy az AM és a BM egyenesek merőlegesek legyenek egymásra.

663. Egy derékszögű háromszög átfogójának a két végpontja a (4; 2) és a (−6; −4) pont. Utóbbi csúcsból kiinduló befogóegyenesének $y=\frac{1}{2}x-1$. Határozzuk meg a derékszög csúcsának a koordinátáit.

664. Számítsuk ki a háromszög csúcsainak a koordinátáit, ha az egyik oldalegyenesének egyenlete $5x-3y+2=0$, a másik két oldalához tartozó magasságvonal egyenlete $4x-3y+1=0$ és $7x+2y-22=0$.

665. Egy háromszög két csúcsa:

a) $A(-6;\ 2)$, $B(2;\ -2)$. Magasságpontja: $M(1;\ 2)$;

b) $A(3;\ -1)$, $B(5;\ 7)$. Magasságpontja: $M(4;\ -1)$;

c) $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 9)$. Magasságpontja: $M(3;\ 4)$.

Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

666. Írjuk fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, ha az

a) egyik csúcsa $A(3;\ -4)$, és két magasságvonalának az egyenlete $7x-2y-1=0$ és $2x-7y-6=0$;

b) egyik csúcsa $A(1;2)$, és két magasságvonalának az egyenlete $2x-3y+$ $+1=0$ és $x+y=0$.

667. Egy háromszög csúcsai: $A(-3;\ 4)$; $B(4;\ 1)$; $C(0;\ 9)$. Számítsuk ki a talpponti háromszög területét.

668. Egy háromszög csúcsai: $(-3;\ 2)$; $(-1;\ 6)$; $(4;\ 2)$. Igazoljuk, hogy az oldalfelező merőlegesek egy pontban metszik egymást.

669. Igazoljuk, hogy az $x-y=1$; $x+2y=5$ és a $-x+4y=1$ egyenesekkel meghatározott háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.

670. Egy háromszög csúcsai:

a) $(0;\ 0)$; $(8;\ 0)$; $(2;\ 6)$;
b) $(0;\ 0)$; $(-6;\ 0)$; $(-4;\ -8)$;
c) $(0;\ 0)$; $(4;\ -2)$; $(12;\ 0)$;
d) $(a;\ 0)$; $(0;\ b)$; $(-c;\ 0)$;
e) $(2;\ 0)$; $(3;\ 2)$; $(4;\ -3)$;
f) $(-2;\ 0)$; $(5;\ -1)$; $(1;\ 5)$.

Igazoljuk, hogy az adott háromszögek magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Számítsuk ki a magasságpont koordinátáit.

671. Határozzuk meg a $(-1;\ 0)$; $(5;\ 0)$ és $(1;\ 4)$ csúcsokkal adott háromszög súlypontjának, magasságpontjának és a körülírt kör középpontjának a koordinátáit. Igazoljuk, hogy a három pont egy egyenesen van.

672. Egy háromszög csúcsai $(0;\ 0)$; $(8;\ 0)$; $(5;\ 6)$. Igazoljuk, hogy a súlypont, magasságpont és a köré írható kör középpontja egy egyenesen van.

673. Határozzuk meg a $(2;\ 7)$; $(-4;\ -3)$ és $(8;\ 2)$ csúcsokkal adott háromszög Euler-féle egyenesének egyenletét.

674. Egy háromszög csúcsai: $A(1;\ -2)$; $B(-3;\ 4)$; $C(2;\ -5)$. Számítsuk ki az A csúcshoz tartozó magasságvonal és az AC oldalhoz tartozó súlyvonal metszéspontjának a koordinátáit.

675. Egy négyzet két szemközti csúcsa:

a) $A(3;\ 5)$ és $C(4;\ 2)$; *b)* $A(1;\ 2)$ és $C(4;\ 8)$.

Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit.

676. Egy paralelogramma három csúcsa:

a) $(3;\ 1)$; $(1;\ 3)$; $(0;\ 0)$;
b) $(-1;\ 1)$; $(0;\ -2)$; $(3;\ 0)$;
c) $(3;\ 8)$; $(5;\ 1)$; $(4;\ -3)$;
d) $(7;\ -12)$; $(12;\ 24)$; $(-5;\ 3)$.

Számítsuk ki a hiányzó csúcs koordinátáit. (Hány megoldás van?)

677. Igazoljuk, hogy az $x+2y+1=0$, $6x-3y=5$, $y=2x-1$ és a $4x+$ $+8y+7=0$ egyenesek derékszögű paralelogrammát határoznak meg.

678. Derékszögű paralelogramma két szomszédos csúcsa: $A(-1;\ -2)$; $B(5;$ $-5)$. Utóbbi csúcson áthaladó átló egyenesének egyenlete $7x+4y=15$. Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit.

679. Egy rombusz két oldalegyenesének egyenlete: $x-3y=0$, $3x-y+8=0$. A két oldal metszéspontjával szemközti csúcsa $(5; 7)$. Határozzuk meg a rombusz két szimmetriatengelyének az egyenletét.

680. Egy paralelogramma két oldalának egyenlete: $x+2y+1=0$, $2x+y-3=0$. Középpontja az $(1; 2)$ pont. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

681. Valamely paralelogramma két szomszédos oldalegyenesének egyenlete: $3x+y+10=0$, $x-y-2=0$. A két oldal metszéspontjával szemközti átló egyenesének egyenlete $x-5y-2=0$. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

682. Igazoljuk, hogy a $(0; 1)$; $(4; 2)$; $(3; 6)$; $(-5; 4)$ pontokkal megadott négyszögben két derékszög van. Számítsuk ki a területét.

683. Igazoljuk, hogy a $(10; 10)$; $(-14; -2)$; $(-10; -10)$; $(4; -24)$ pontokkal adott négyszög egyik átlójával két derékszögű háromszögre bontható. Számítsuk ki a területét.

684. Mekkora annak a négyszögnek a területe, amelyet az $x=2y-4$ egyenes, erre a $(7; 1)$ pontból húzott merőleges és a koordinátatengelyek zárnak be?

685. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe téglalapot írunk úgy, hogy a téglalap két oldala a két befogóra illeszkedjék. Ennek az átfogóra illeszkedő csúcsából merőleges egyenest húzunk a téglalapnak vele szemközti átlójára. Mutassuk meg, hogy a merőleges egy rögzített ponton halad át, függetlenül a téglalap méretétől.

686. Az XOY koordináta-rendszerben adott az $OABC$ derékszögű paralelogramma. O az origóval azonos, A az x tengelyre, C az y tengelyre illeszkedik. Bizonyítsuk be, hogy ha a közölt feltételek mellett a derékszögű paralelogramma területe változik, de a kerülete állandó, akkor a változó helyzetű B pontok mindegyikéből az AC átlóra húzott merőlegesek a sík ugyanazon pontján haladnak át. Szerkesszük meg ezt a pontot.

687. A koordináta-rendszerben az origóból mérjük fel az x tengelyre az $OA=a$ és az $OA'=a+z$, az y tengelyre az $OB=b$ és az $OB'=b+z$ távolságokat. Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'$ szakasz felező merőlegese mindig ugyanazon a ponton halad át, ha az a és a b rögzített számok, z pedig változik.

688. Az $OABC$ téglalap szemközti O és B csúcsain át párhuzamosokat, a másik két csúcson át ezekre merőlegeseket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett téglalap középpontja azonos az $OABC$ téglalap középpontjával.

689. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű trapéz átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a merőleges szár a párhuzamos oldalak mértani közepe.

690. K, L és O a sík tetszőleges pontjai, a KL szakasz felezőpontja M. O körül K-t $+90°$-kal, L-et $-90°$-kal elforgatva a K_1, illetve az L_1 pontot kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy $K_1L_1=2\cdot OM$ és $K_1L_1 \perp OM$.

KÉT PONT TÁVOLSÁGA

691. Számítsuk ki a következő pontoknak az origótól mért távolságát: $P_1(3;\ 4)$; $P_2(3;\ -4)$; $P_3(-5;\ -12)$; $P_4(-3;\ 7)$; $P_5(\sqrt{2};\ \sqrt{5})$; $P_6\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2};\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$; $P_7(0;\ 3)$; $P_8(a;\ b)$; $P_9(a;\ -a)$; $P_{10}(a+b;\ a-b)$.

692. Számítsuk ki az

a) $(1;\ 3)$, $(4;\ 7)$; *b)* $(-3;\ -2)$, $(1;\ 5)$;
c) $(-3;\ 6)$, $(4;\ 2)$; *d)* $(0;\ -4)$, $(2;\ 3)$;
e) $(-6;\ -2)$, $(-1;\ -9)$; *f)* $\left(\frac{3}{2};\ -\frac{7}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{4};\ \frac{5}{2}\right)$;
g) $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$;
h) $(-\sqrt{8};\ \sqrt{3})$, $(\sqrt{2};\ -\sqrt{12})$ pontok távolságát.

693. Számítsuk ki az $\mathbf{a}(4;\ 3)$, $\mathbf{b}(-5;\ 2)$, $\mathbf{c}(-4;\ -1)$, $\mathbf{d}(7;\ -6)$ vektorok hosszát.

694. Mekkorák a háromszög oldalai, ha csúcsai:

a) $(2;\ 3)$; $(5;\ 7)$; $(10;\ -3)$;
b) $(3;\ 4)$; $(-7;\ -6)$; $(5;\ -1)$?

695. Számítsuk ki a háromszög kerületét, ha csúcsai:

a) $(-1;\ -1)$; $(3;\ 7)$; $(3;\ -5)$;
b) $(a;\ b)$; $(a;\ -b)$; $(0;\ -b)$.

696. Bizonyítsuk be, hogy

a) a $(3;\ 2)$; $(7;\ -2)$; $(6;\ 1)$;
b) az $(1;\ 3)$; $(3;\ -1)$; $(7;\ -3)$

pontok egy egyenlő szárú háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszög területét.

697. Bizonyítsuk be, hogy

a) a $(10;\ 4)$; $(3;\ -5)$; $(1;\ 1)$;
b) $(2;\ 4)$; $(-2;\ 3)$; $(8;\ -20)$

pontok egy derékszögű háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszög köré írható kör területét.

698. Egy háromszög csúcsai $(3;\ -1)$; $(2;\ 4)$; $(-1;\ 5)$. Mekkorák a háromszög szögei, és mekkora a területe?

699. Egy háromszög csúcsai: $(-2;\ 1)$; $(4;\ 8)$; $(10;\ 6)$. Számítsuk ki a háromszög legnagyobb szögét.

700. Állapítsuk meg, hogy milyen négyszöget határoznak meg a következő pontok:

a) $(1;\ 3)$; $(2;\ 1)$; $(5;\ 2)$; $(4;\ 4)$;
b) $(1;\ 1)$; $(6;\ 1)$; $(5;\ 4)$; $(2;\ 4)$;

c) $(2;\,3)$; $(3;\,0)$; $(0;\,-1)$; $(-1;\,2)$;
d) $(1;\,5)$; $(5;\,1)$; $(1;\,-3)$; $(-3;\,1)$;
e) $(a;\,0)$; $(0;\,a)$; $(-a;\,0)$; $(0;\,-a)$.

701. Rajzoljunk kört, melynek a középpontja a $P(3;\,2)$ pont, és áthalad a $P_1(13;\,-10)$ ponton. Ellenőrizzük, hogy a $P_2(-11;\,9)$ pont illeszkedik-e a körre?

702. Rajzoljunk kört, melynek középpontja a $P(0;\,-13)$ pont, és érinti az x tengelyt. Vizsgáljuk meg, hogy áthalad-e a kör a $P_1(11;\,-6)$ és a $P_2(-5;\,-1)$ pontokon is.

703. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amelynek középpontja

a) a $(3;\,1)$ pont, és 6 hosszúságegységnyi húrját a $(6;\,5)$ pont felezi;

b) az $(1;\,-1)$ pont, és 10 hosszúságegységnyi húrját a $(2;\,0)$ pont felezi.

704. Egy kör középpontja

a) $(5;\,3)$, a sugara 5 egység. Milyen hosszú az a húrja, melyet a $(3;\,2)$ pont felez?

b) $(6;\,-1)$, a sugara 6 egység. Milyen hosszú az a húrja, melyet a $(3;\,4)$ pont felez?

705. Milyen összefüggés van azoknak a pontoknak a koordinátái között, melyek egyenlő távolságra vannak

a) a $(4;\,2)$ és a $(-3;\,3)$;

b) a $(-3;\,5)$ és a $(-4;\,-2)$

pontoktól?

706. Milyen összefüggés van azoknak a pontoknak a koordinátái között, melyek

a) a $(6;\,-2)$ ponttól 3 egységnyi,

b) a $(-5;\,7)$ ponttól 2 egységnyi

távolságra vannak?

707. Határozzuk meg a szabályos hatszög középpontjának a koordinátáit, ha két szomszédos csúcsa: $A(2;\,0)$ és $B(5;\,3\sqrt{3})$.

708. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amely az origótól és a $(9;\,-3)$ ponttól egyenlő távolságra van.

709. Határozzuk meg az y tengelynek azt a pontját, amely az origótól és a $(-2;\,5)$ ponttól egyenlő távolságra van.

710. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amely a $(2;\,1)$ és a $(6;\,5)$ pontoktól egyenlő távolságra van.

711. Határozzuk meg az x tengelyen azokat a pontokat, amelyek az $(5;\,12)$ ponttól 13 egységnyi távolságra vannak.

712. Az y tengely mely pontjai vannak 15 egységnyi távolságra a $(-5;\,-9)$ ponttól?

713. Két pont távolsága 10 hosszúságegység; az egyik pont $(4;\,5)$, a másik pont abszcisszája -2. Mekkora az utóbbi pont ordinátája?

714. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha áthalad a $(-4;\,2)$ ponton és az x tengelyt a $(2;\,0)$ pontban érinti.

715. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha áthalad a $(2;\,0)$ ponton, és az y tengelyt a $(0;\,6)$ pontban érinti.

716. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha áthalad a $(4;\,2)$ ponton, és mindkét koordinátatengelyt érinti.

717. Egyenlő szárú háromszögben az alap végpontjai $(-1;\ -1)$ és $(8;\ 2)$, a szára 5 egység. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

718. Határozzuk meg a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit, ha csúcsai:

a) $A(1;\ 5)$; $B(0;\ 6)$; $C(-6;\ -2)$;
b) $A(2;\ 1)$; $B(-3;\ 2)$; $C(-1;\ 1)$;
c) $A(0;\ 2)$; $B(1;\ 1)$; $C(2;\ -2)$;
d) $A(7;\ 7)$; $B(0;\ 8)$; $C(-2;\ 4)$;
e) $A(4;\ 0)$; $B(1;\ 2)$; $C(3;\ -2)$.

719. Egy négyzet két szomszédos csúcsa:

a) $A(0;\ 5)$; $B(3;\ 1)$;
b) $A(4;\ 8)$; $B(7;\ 4)$.

Határozzuk meg hiányzó csúcsainak a koordinátáit.

720. Egy négyszög egymás után következő csúcsai: $A(-1;\ 2)$; $B(4;\ 3)$; $C(3;\ 6)$ és $D(1;\ 5)$. Mekkorák a négyszög szögei?

721. Jelöljük az $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ egyenlet gyökeit x_1 és x_2-vel, az $a_2y^2+b_2y+c_2=0$ egyenlet gyökeit y_1 és y_2-vel. Fejezzük ki az $A_1(x_1,\ y_1)$ és az $A_2(x_2,\ y_2)$ pontok távolságát az együtthatókkal.

722. A koordináta-rendszerben adottak az $A(0;\ 9)$; $B(6;\ 3)$; $C\left(-\frac{1}{3};\ -1\right)$; $D\left(3;\ -\frac{7}{2}\right)$ pontok. Határozzuk meg azt a P pontot, amelyre nézve $PA=PB$ és $PC:PD=2:3$.

723. A $2x+y-3=0$ egyenesen határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek az $(1;\ 1)$ ponttól $\sqrt{5}$ távolságra vannak.

724. Egy téglalap egyik átlója az $x+13y=119$, a másik átlója a $11x-7y=34$ egyenesre illeszkedik. Az átló hossza $\sqrt{170}$ egység. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

725. Adott az ABC háromszög két csúcsa és a harmadik csúcshoz tartozó belső szögfelező egyenlete: $A(-1;\ -1)$; $B(1;\ 2)$; $2x+y=1$. Számítsuk ki a hiányzó csúcs koordinátáit.

726. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak koordinátáit, ha egyik oldalegyenesének egyenlete: $x-3y=11$, egyik átlójának az egyenlete: $9x-7y=19$, az átló hosszúsága $\sqrt{130}$. Hány megoldás van?

727. Jelöljük az ABC háromszög súlypontját S-sel. Bizonyítsuk be, hogy

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(AS^2+BS^2+CS^2).$$

728. Adott az ABC háromszög és a síkjában az e egyenes. Határozzuk meg az e egyenesen azt a pontot, amelynek a csúcsoktól mért távolságainak négyzetösszege a legkisebb.

SKALÁRIS SZORZAT, ADOTT PONTON ÁTMENŐ ADOTT NORMÁLVEKTORÚ EGYENES EGYENLETE, PONT TÁVOLSÁGA EGYENESTŐL, KÉT EGYENES HAJLÁSSZÖGE

729. Két vektor skaláris szorzatán a két vektor hosszának és hajlásszögük cosinusának a szorzatát értjük. Az **a** és **b** vektor skaláris szorzatát $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$-vel jelöljük. A definíció szerint:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ az **a**, **b** vektorok hajlásszögét jelöli.
Bizonyítsuk be, hogy

a) ha **a** és **b** egyirányú, akkor $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$,

b) ha **a** és **b** ellentétes irányú, akkor $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$,

c) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$,

d) egy vektornak önmagával való skaláris szorzata, amit a vektor négyzetének mondunk, a vektor hosszának a négyzetével egyenlő,

e) az egységvektorok skaláris szorzata a hajlásszögük cosinusával egyenlő. Tehát $\mathbf{a}^\circ\cdot\mathbf{b}^\circ = \cos(\mathbf{a}^\circ, \mathbf{b}^\circ)$,

f) a nullvektor skaláris szorzata bármely vektorral 0.

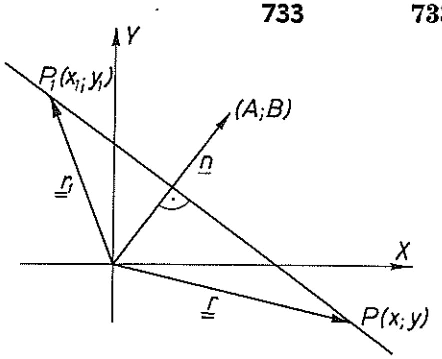
730. Megállapodva abban, hogy a nullvektort minden vektorra merőlegesnek mondjuk, bizonyítsuk be, hogy két vektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

731. Számítsuk ki az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatát, ha adottak az **a** és a **b** vektorok koordinátái.

732. A 731. feladat eredményét felhasználva bizonyítsuk be, hogy

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$,

b) $\lambda\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})$, ahol λ egy valós szám.



733

733. Bizonyítsuk be, hogy a P_1 ponton áthaladó, **n** normálvektorú egyenes vektoregyenlete:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) = 0,$$

ahol $\mathbf{r}_1$ a P_1 ponthoz, **r** az egyenes tetszőleges pontjához tartozó helyvektort jelöli (733. ábra).

(Egy adott egyenesre merőleges nullvektortól különböző vektort az egyenes normálvektorának nevezzük.)

734. Igazoljuk, hogy a $P_1(x_1;\ y_1)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(A,\ B)$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1) = 0$$

(733. ábra).

735. Írjuk fel

a) a $P_1(5; 2)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(4; 3)$ normálvektorú,
b) a $P_1(-3; 4)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(2; 1)$ normálvektorú,
c) a $P_1(-5; -6)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-2; 3)$ normálvektorú,
d) a $P_1(0; 0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-1; -5)$ normálvektorú,
e) a $P_1(8; -7)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-1; -1)$ normálvektorú

egyenes egyenletét.

736. Az

a) $x+y-1 = 0$; *b)* a $3x-4y+5 = 0$; *c)* az $5x-y = 1$

egyenletből állapítsuk meg az egyenes egy normálvektorát.

737. Két metsző, nem merőleges egyenes hajlásszögén a két egyenes által meghatározott 2–2 egyenlő szögtartomány közül a kisebbet értjük. Igazoljuk, hogy az e_1 és e_2 egyenes ω hajlásszögére

$$\cos\omega = |\cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)|,$$

ahol $\mathbf{n}_1$ az e_1, $\mathbf{n}_2$ az e_2 egyenes egyik normálvektora. Számítsuk ki az egyenesek hajlásszögét, ha egyenletük:

a) $x-2y+4 = 0$, $3x-2y-6 = 0$;
b) $5x-3y-12 = 0$, $3x+y-6 = 0$;
c) $3x-y = 0$, $y+2x-5 = 0$;
d) $3x+2y-24 = 0$, $3x-4y-12 = 0$;
e) $3x+4y = 0$, $5x-2y-3 = 0$;
f) $4x-3y-6 = 0$, $x-7y-2 = 0$;
g) $4x+1 = 0$, $2x+3y = 6$;
h) $4x-6 = 0$, $5x-2y-2 = 0$;
i) $3x-4 = 0$, $5y-15 = 0$;
j) $A_1x+B_1y+C_1 = 0$, $A_2x+B_2y+C_2 = 0$.

738. Bizonyítsuk be, hogy ha az y tengelyt metsző m_1, m_2 iránytangensű egyenesek nem merőlegesek egymásra, akkor ω hajlásszögükre

$$\operatorname{tg}\omega = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|.$$

739. Számítsuk ki a $(-3; -2)$ és az $(5; 8)$ pontokon áthaladó egyenes és a $6x+5y = 30$ egyenes hajlásszögét.

740. Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha oldalegyenesének egyenlete:

a) $y = 2x-1$; $y = x+3$; $y = -x+5$;
b) $x-5y+9 = 0$; $3x+2y-7 = 0$; $2x+y+1 = 0$.

741. Mekkora szöget zárnak be egymással az $(1; 8)$ és a $(6; 2)$ pontokból az origóba húzott szakaszok?

742. Mekkorák a háromszög szögei, ha csúcsai:

a) $(-1; -2)$; $(2; 3)$; $(4; -1)$;
b) $(0; 2)$; $(2; 2)$; $(3+\sqrt{3}; 3+\sqrt{3})$;
c) $(4; 2)$; $(1; 4)$; $(2; -3)$.

743. Egyenlő szárú háromszög alapegyenesének egyenlete $x+y-1=0$. Az egyik szár egyenesének egyenlete $x-2y-2=0$. A másik szárra illeszkedő pont koordinátái $(-2;\ 0)$. Határozzuk meg a harmadik oldal egyenesének egyenletét.

744. Írjuk fel az $(5;\ 4)$ ponton áthaladó egyenes egyenletét, amely az $y = -x+7$ egyenessel $60°$-os szöget alkot.

745. Határozzuk meg annak az egyenesnek egyenletét, amely a $(-3;\ 5)$ ponton halad át, és az $5x-9y = -43$ egyenessel $45°$-os szöget alkot.

746. Írjuk fel a $2x-4y+9 = 0$ egyenessel $60°$-os szöget bezáró és az origón áthaladó egyenes egyenletét.

747. Írjuk fel a $(3;\ 4)$ ponton áthaladó és az $y = x+3$ egyenessel $45°$-os szöget bezáró egyenes egyenletét.

748. Számítsuk ki a négyszög átlóinak hajlásszögét, ha egymás után következő csúcsai:

a) $A(-1;\ 2)$; $B(6;\ 1)$; $C(5;\ 6)$; $D(1;\ 5)$;
b) $A(5;\ 4)$; $B(-2;\ 7)$; $C(-3;\ -6)$; $D(4;\ -5)$.

749. Bizonyítsuk be, hogy a $3x-4y-20 = 0$, $3x+5y-20 = 0$, $4x-3y+12 = 0$, $5x+3y+15 = 0$ egyenesek húrnégyszöget határoznak meg.

750. Bizonyítsuk be, hogy egyenlő oldalú háromszög csúcsainak koordinátái nem lehetnek valamennyien egész számok.

751. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes $Ax+By+C=0$ egyenletébe egy, az egyenesen kívül elhelyezkedő $P(x_1;\ y_1)$ pont koordinátáit behelyettesítjük, pozitív vagy negatív értékhez jutunk, aszerint, hogy a P_1 pont az egyenes által határolt félsíkoknak egyikében vagy másikában helyezkedik el.

752. Az $Ax+By+C = 0$ egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(A,\ B)$. Ha a normálvektor egységvektor, ha tehát $A^2+B^2 = 1$, akkor az egyenletet az egyenes normálegyenletének nevezzük. Ha $A^2+B^2 \neq 1$, akkor az egyenes normálegyenlete

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha az egyenes normálegyenletébe tetszőleges $P_1(x_1;\ y_1)$ pont koordinátáit behelyettesítjük, akkor a P_1 pontnak az egyenestől való távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|.$$

Mégpedig az $\dfrac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ nulla pozitív vagy negatív aszerint, hogy a P_1 pont az egyenesre illeszkedik, illetve a normál egységvektor a P_1 pontot tartalmazó félsíkba mutat-e vagy sem.

753. Írjuk fel a következő egyenesek normálegyenletét:

a) $3x+4y+20 = 0$;
b) $6x-8y+15 = 0$;
c) $\sqrt{2}x+\sqrt{7}y-3 = 0$;
d) $x-y+3 = 0$.

754. Milyen messze van az origó az

a) $y=\frac{1}{2}x+3$; *b)* $x+y=1$; *c)* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

d) $4x+3y-7=0$; *e)* $Ax+By+C=0$ egyenestől?

755. Milyen messze van

a) az $(1;\ 2)$ pont az $y=-2x+2$ egyenestől;
b) a $(-3;\ 9)$ pont az $x-y=2$ egyenestől;
c) a $(4;\ -19)$ pont a $3x+17y-1=0$ egyenestől;
d) a $(4;\ -2)$ pont a $8x-15y-11=0$ egyenestől;

e) az $(1;\ 1)$ pont az $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ egyenestől;

f) a $(-2;\ 0)$ pont a $3x+y=0$ egyenestől;
g) a $(2;\ -6)$ pont a $(7;\ 3)$ és $(5;\ 4)$ pontokon áthaladó egyenestől?

756. Egy háromszög csúcsai: $A(-5;\ 0)$; $B(4;\ 2)$; $C(-1;\ 8)$. Számítsuk ki a súlypontnak a B csúcson áthaladó magasságvonaltól mért távolságát.

757. Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenlete: $y=-x+3$; $y=\frac{1}{2}x$; $x=0$.

Számítsuk ki a magasságokat.

758. Mekkorák a háromszög magasságai, ha a csúcsai:

$A(-4;6)$; $B(-2;\ -3)$; $C(4;5)$?

759. Számítsuk ki a háromszög területét, ha a csúcsai:

a) $(0;0)$; $(3;4)$; $(7;\ -1)$;
b) $(-1;\ -1)$; $(1;5)$; $(7;\ -2)$;
c) $(4;2)$; $(9;4)$; $(7;6)$.

760. Egy háromszög oldalegyeneseinek az egyenlete:

$5x+2y-29=0$, $9x-y-43=0$, $14x+y-49=0$.

Milyen messze van a háromszög súlypontja a háromszög oldalaitól?

761. Számítással döntsük el, hogy a $P(0;\ -2)$ és a $Q(1;\ -4)$ pontokat elválasztja-e a $2x-4y+5=0$ egyenes.

762. Számítsuk ki a következő egyenesek távolságát:

a) $3x-y=6$, $3x-y=8$;
b) $x+2y+5=0$, $x+2y-3=0$;

c) $y=\frac{x}{2}+3$, $y=\frac{x}{2}-4$;

d) $2x+3y-8=0$, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$;

e) $y=mx+b$, $y=mx+b'$.

763. Számítsuk ki a négyzet területét, ha két oldalegyenesének egyenlete $3x-5y=4$ és $3x-5y=5$.

764. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos a $3x+4y+25=0$ egyenessel, és tőle 1 egység távolságra van.

765. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos a $4x+$ $+3y+1=0$ egyenessel, és tőle 3 egységre halad.

766. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $x-y=6$ egyenessel, és

a) az adott egyenestől $\sqrt{2}$ egység távolságra;
b) az origótól 6 egység távolságra;
c) az origótól $2\sqrt{6}$ egység távolságra van.

767. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely

a) párhuzamos az $x+3y+4=0$ egyenessel, és a $(-1;\ 2)$ ponttól $\sqrt{10}$ egység távolságra halad;
b) párhuzamos az $x-y+2=0$ egyenessel, és a $(2;\ 3)$ ponttól 3 egység távolságra halad.

768. Írjuk fel annak az egyenesnek egyenletét, amely áthalad a $(-4;\ 3)$ ponton, és az origótól 4 egység távolságra halad.

769. Fektessünk a $(-1;\ 2)$ ponton át egyenest, amely a $(6;\ 1)$ ponttól 5 egység távolságra van.

770. Számítsuk ki az x tengely azon pontjainak a koordinátáit, amelyek az $y=\frac{4}{3}x+4$ egyenestől 10 egység távolságra vannak.

771. Keressük meg azt a pontot, amely az $(1;\ 2)$ és a $(3;\ -5)$ pontoktól egyenlő, az $y-2x+3=0$ egyenestől pedig 2 egység távolságra van.

772. Számítsuk ki

a) a $4x+5y-3=0$ és az $5x-4y+10=0$;
b) a $3x+y+1=0$ és a $11x+2y=2$;
c) az $y=3x$ és az $x+y=1$;
d) az $x=2$ és az $y=\frac{3}{4}x$;
e) az $x=3$ és az $y=5$

egyenesek szögfelezőinek egyenletét.

773. Valamely egyenes egyenlete $3y-4x=1$.
Számítsuk ki az egyenes és a koordinátatengelyek szögfelezőinek egyenletét.

774. Bizonyítsuk be, hogy az $A(-5;\ 0)$; $B(0;\ 12)$; $C(9;\ 0)$ pontokkal megadott háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást. Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát. Írjuk fel a B és C csúcsokból induló külső szögfelezők egyenletét. Igazoljuk, hogy ezek metszéspontja rajta van az A csúcshoz tartozó belső szögfelezőn.

775. Egy háromszög csúcsai:

a) $A(-4;\ 1)$; $B(2;\ -3)$; $C(-1;\ 2)$;
b) $A(-2;\ 1)$; $B(6;\ 5)$; $C(4;\ -4)$.

Számítsuk ki a magasságokat, a súlyvonalak hosszát, a körülírható és a beírható kör sugarát.

776. Egyenlő szárú háromszög száregyeneseinek egyenlete:

$$2x-y+8=0 \quad \text{és} \quad x-2y-12=0.$$

Az alap egyik pontja (5; 0). Határozzuk meg az alap egyenletét és a csúcsok koordinátáit.

777. Tükrözzük a $P(-5;\ 13)$ pontot a $2x-3y-3=0$ egyenesre. Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit.

778. Tükrözzük a $P(a;\ b)$ pontot az $Ax+By+C=0$ egyenesre. Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit.

779. A fénysugár áthalad a $(-2;\ 8)$ ponton, visszaverődik a $2x+3y+6=0$ egyenesről, és a $(-7;\ 20)$ pontra esik. Határozzuk meg a beeső és a visszavert fénysugár egyenletét.

780. A fénysugár az $x-2y+5=0$ egyenesen terjed, és a $3x-2y+7=0$ egyenesről visszaverődik. Határozzuk meg a visszavert fénysugár pályájának az egyenletét.

781. A $2x-y-5=0$ egyenesen keressük meg azt a pontot, amelynek az $A(-7;\ 1)$ és a $B(-5;\ 5)$ pontoktól mért távolságainak összege a legkisebb.

782. A $3x-y-1=0$ egyenesen keressünk olyan P pontot, amelynek az $A(4;\ 1)$ és a $B(0;\ 4)$ pontoktól mért távolságai különbségének abszolút értéke a legnagyobb.

TERÜLETSZÁMÍTÁS

(Megjegyezzük, hogy területszámítással kapcsolatos feladatok más fejezetekben is találhatók. Ebben a fejezetben a koordináta-geometriában használatos területképletekkel és azok alkalmazásával ismertetjük meg az olvasót.)

783. Igazoljuk, hogy a $P_1(0;\ 0)$, $P_2(x_2;\ y_2)$, $P_3(x_3;\ y_3)$ pontokkal meghatározott háromszög területe

$$T=\frac{1}{2}\left|x_2y_3-x_3y_2\right|.$$

784. Igazoljuk, hogy a $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$, $P_3(x_3;\ y_3)$ pontokkal meghatározott háromszög területe:

$$T=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|.$$

785. Számítsuk ki a háromszög területét, ha csúcsai:

a) $(-2;\ -1)$;	$(6;\ 1)$;	$(1;\ 6)$;
b) $(0;\ 0)$;	$(4;\ 8)$;	$(2;\ 14)$;
c) $(2;\ 5)$;	$(7;\ -1)$;	$(0;\ 0)$;
d) $(1;\ 3)$;	$(-1;\ 4)$;	$(0;\ 0)$;
e) $(4;\ 0)$;	$(-4;\ 0)$;	$(3;\ 8)$.

786. Egy háromszög csúcsai: $A(3;\ 1)$; $B(7;\ 4)$; $C(4;\ 7)$. Számítsuk ki a háromszög magasságait.

787. Egy háromszög két csúcsa az $(5;\ 1)$ és a $(-2;\ 2)$ pont, a harmadik csúcsa az x tengelyen van. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit, ha a területe 10 egység.

788. Valamely háromszög területe 15 területegység, két csúcsa $(-1;\ -1)$ és $(5;\ 2)$, harmadik csúcsa az $(5;\ 2)$ ponttól 5 egység távolságra van. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

789. Mekkora a négyszög területe, ha csúcsai rendre:

a) (2; 1); (8; 3); (6; 6); (3; 4);
b) (−4; 3); (2; 8); (7; 9); (6; 3);
c) (8; 4); (7; −3); (−4; −5); (1; 5);
d) (3; 2); (−8; 9); (−3; 4); (−10; 3).

790. Bizonyítsuk be, hogy a (6; 2); (13; 1); (12; −6); (1; −8) pontok egy deltoid csúcsai. Számítsuk ki területét.

791. Az $A(-8;\ -14)$; $B(-4;\ 2)$; $C(5;\ 8)$ pontokkal megadott háromszögben az AB oldalt 1:3 arányban, a BC oldalt 1:2 arányban és a CA oldalt 1:1 arányban osztjuk. Mekkora területű háromszöget határoznak meg az osztópontok?

792. Egy háromszög csúcsai: $A(x_1;\ y_1)$; $B(x_2;\ y_2)$; $C(x_3;\ y_3)$. Jelöljük ki a P pontot a BC oldalon úgy, hogy $BP = \lambda_1 \cdot PC$, a Q pontot a CA oldalon úgy, hogy $CQ = \lambda_2 \cdot QA$, az R pontot az AB oldalon úgy, hogy $AR = \lambda_3 \cdot RB$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög területe T, akkor a PQR háromszög területe

$$t = \frac{(1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)T}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}.$$

Mit kapunk akkor, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$?

793. Egy háromszög csúcsai: $A(3;\ 0)$; $B(18;\ 15)$; $C(0;\ 9)$. A háromszög belsejében felvett P pont a háromszöget 3 háromszögre bontja. Jelöljük a PAB háromszög területét t_1-gyel, a PBC háromszög területét t_2-vel, a PCA háromszög területét t_3-mal. Számítsuk ki P pont koordinátáit, ha

$$t_1 : t_2 : t_3 = 1:2:3.$$

794. Igazoljuk, hogy bárhol jelöljük is ki a koordináta-rendszerben a P_1, P_2, P_3 pontokat, a $P_1P_2P_3$ háromszög területe: $t = OP_1P_2\triangle + OP_2P_3\triangle + OP_3P_1\triangle$,
ahol O az origó.

795. Számítsuk ki a négyszög területét, ha csúcsai pozitív körüljárást választva: $(x_1;\ y_1)$; $(x_2;\ y_2)$; $(x_3;\ y_3)$; $(x_4;\ y_4)$.
Alkalmazzuk képletünket a 789. feladatban szereplő négyszögek területének kiszámítására.

796. Egy egyenesen helyezkedik-e el az a három pont, amelyek koordinátái: (−10; −3); (−1; 1); (6; 4)?

797. A (−2; 0); (0; 2); $\left(a;\ \frac{3}{2}a\right)$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Számítsuk ki harmadik pont koordinátáit.

798. A koordináta-rendszerben rácspontoknak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely paralelogramma csúcsai rácspontok, és a belsejében vagy a határán van még más rácspont is, akkor a területe nagyobb 1-nél.