

386. Az  $ABCD$  négyszögben adott  $AB = a$ ,  $CD = b$ ,  $ABC$  szög =  $ADC$  szög =  $90^\circ$  és  $BAD$  szög =  $\alpha$  úgy, hogy  $\alpha < 90^\circ$ . Számítsuk ki  $AD$ -t,  $BC$ -t és a négyszög területét. Melyek a feladat megoldhatóságának feltételei?
387. Egy trapéz alakú telket, melynek területe  $3600 \text{ m}^2$ , egyik átlós útja úgy oszt egy szabályos és egy általános háromszögre, hogy a nyert részek területeinek aránya  $5:4$ . Mekkora a trapéz oldalai és szögei?
388. Egy trapéz területe  $204 \text{ m}^2$ , a párhuzamos oldalak különbsége:  $a - c = 14 \text{ m}$ ; a nem párhuzamos oldalak különbsége:  $b - d = 2 \text{ m}$ , a szemben fekvő szögek különbsége:  $\gamma - \alpha = 59^\circ 29'$ . Számítsuk ki a párhuzamos oldalak hosszát.
389. Valamely háromszögben két oldal aránya:  $a:b = 2:3$ . A körülírt kör sugara  $15 \text{ cm}$ ; a harmadik oldalhoz tartozó magasság:  $m_c = 20 \text{ cm}$ . Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
390. Egy háromszögben két oldal összege:  $b + c = 5 \text{ cm}$ , az általuk bezárt szög  $60^\circ$ , a harmadik oldalhoz tartozó magasság:  $m_a = \sqrt{3} \text{ cm}$ . Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?
391. Egy háromszög oldalainak aránya:  $a:b:c = 25:29:36$ . A beírt kör sugara:  $\rho = 232 \text{ cm}$ . Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
392. Adott háromszöghöz szerkesszünk vele egyenlő területű egyenlő oldalú háromszöget.

## FOKOK ÁTSZÁMÍTÁSA ÍVMÉRTÉKKÉ ÉS VISSZA

393. Mekkora a következő szögek  $\pi$ -vel kifejezett ívmértéke:

$15^\circ$ ;  $22^\circ 30'$ ;  $45^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $108^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $135^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $180^\circ$ ;  $210^\circ$ ;  $225^\circ$ ;  $240^\circ$ ;  $270^\circ$ ;  $300^\circ$ ;  $315^\circ$ ;  $330^\circ$ ;  $750^\circ$ ;  $840^\circ$ ;  $1080^\circ$ ?

394. Mekkora a következő szögek ívmértékének négy tizedesjegyű közelítő értéke:

$22^\circ$ ;  $40^\circ$ ;  $55^\circ$ ;  $110^\circ$ ;  $130^\circ$ ;  $250^\circ$ ;  $320^\circ$ ;  $400^\circ$ ;  $1110^\circ$ ;  $17,4^\circ$ ;  $24^\circ 38'$ ;  $228,2^\circ$ ;  $412^\circ 15'$ ;  $316^\circ 10'$ ;  $72^\circ 50'$ ;  $12^\circ 30'$ ;  $21^\circ 18'$ ;  $20^\circ 20'$ ;  $300^\circ 10'$ ;  $79,58^\circ$ ?

395. Hány fokok azok a szögek, melyeknek ívmértéke:

$$a) \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{15\pi}{8}; \frac{10\pi}{9};$$

$$\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{24}; \frac{7\pi}{30}; \frac{17\pi}{45};$$

$$b) 0,125; 0,25; 0,75; 1,5; 3; 6; 8; 10; 18;$$

$$c) 0,01; 0,11; 0,111; 0,93; 0,99; 2,2; 4,1; 9,1; 13,6; 18,55;$$

$$d) \frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{2}; \frac{7}{8}; 2\frac{3}{4}; 7\frac{5}{9}; 9\frac{5}{6}; 100\frac{8}{9}; 1963?$$

396. Határozzuk meg a következő szögfüggvényértékeket:

$$a) \sin \frac{\pi}{4}; \sin \frac{\pi}{3}; \sin(-\pi); \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right); \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right);$$

$$b) \cos \frac{\pi}{8}; \cos \frac{2\pi}{5}; \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right); \cos \frac{11\pi}{6}; \cos \left(-\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$c) \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}; \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right); \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}; \operatorname{tg} \frac{9\pi}{10};$$

$$d) \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}; \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}; \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{6}\right); \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}; \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12};$$

$$e) \sin 0,5; \sin 3,14; \sin (-2); \sin (-100); \sin 1962;$$

$$f) \cos 3; \cos 9,42; \cos 0,3; \cos 11; \cos 48;$$

$$g) \operatorname{tg} 9,5; \operatorname{tg} 0,1; \operatorname{tg} 7; \operatorname{tg} 52; \operatorname{tg} 360;$$

$$h) \operatorname{ctg} 1,2; \operatorname{ctg} 2; \operatorname{ctg} 120; \operatorname{ctg} 235; \operatorname{ctg} 1000?$$

## AZ ADDÍCIÓS TÉTELEK ALKALMAZÁSA

397. Vezessük le:  $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$  kifejezését a  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$  képlet levezetése mintájára, valamint a  $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)}$  összefüggés alapján!

398.  $\sin(x+y)$ ;  $\sin(x-y)$ ;  $\cos(x+y)$  és  $\cos(x-y)$  kifejezések felhasználásával alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

$$a) \sin(x+y) + \sin(x-y);$$

$$b) \sin(x+y) - \sin(x-y);$$

$$c) \cos(x+y) + \cos(x-y);$$

$$d) \cos(x+y) - \cos(x-y).$$

Írjunk  $x+y$  helyett  $\alpha-t$  és  $x-y$  helyett  $\beta-t$ . Hogyan alakulnak a kapott egyenlőségek?

399. Az addíciós összefüggések alapján hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$a) \sin(90^\circ + \alpha) =$$

$$b) \cos(90^\circ + \alpha) =$$

$$c) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) =$$

$$d) \sin(90^\circ - \alpha) =$$

$$e) \cos(90^\circ - \alpha) =$$

$$f) \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) =$$

$$g) \sin(180^\circ + \alpha) =$$

$$h) \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$i) \cos(180^\circ + \alpha) =$$

$$j) \cos(180^\circ - \alpha) =$$

$$k) \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) =$$

$$l) \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) =$$

$$m) \sin(270^\circ + \alpha) =$$

$$n) \cos(270^\circ + \alpha) =$$

$$o) \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) =$$

$$p) \sin(\alpha - 180^\circ) =$$

$$r) \cos(\alpha - 180^\circ) =$$

$$s) \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) =$$

400. Az addíciós tételek alapján írjuk egyszerűbben a következő kifejezéseket:

$$a) \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) =$$

$$b) \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) =$$

$$c) \sin(\alpha + 60^\circ) + \sin(\alpha - 60^\circ) =$$

$$d) \cos(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha) =$$

$$e) \sin(45^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) + \sin^2 30^\circ - \cos(45^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) + \sin^2 60^\circ =$$

$$f) \sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha + 240^\circ) =$$

$$g) \sin^2 30^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ + \sin^2 120^\circ =$$

401. Számítsuk ki a  $30^\circ$ -;  $45^\circ$ -;  $60^\circ$ - és  $90^\circ$ -os szögek tanult szögfüggvényeinek értékét felhasználva a  $15^\circ$ -, a  $75^\circ$ -, a  $105^\circ$ -, a  $120^\circ$ - és a  $135^\circ$ -os szögek szögfüggvényértékeit!
402. Az egységsugarú körbe rajzolt szabályos tízszögből határozzuk meg a  $18^\circ$ -os és a  $72^\circ$ -os szögek szögfüggvényértékeit.
403. Bizonyítsuk be, hogy az egységsíri sugarú körbe szerkesztett  $ABCDE$  szabályos ötszögben  $(AB \cdot AC)^2 = 5$ .
404. Számítsuk ki a  $63^\circ$ -os és a  $27^\circ$ -os szögek szögfüggvényértékeit a  $45^\circ$ -os és az előző feladatban kapott  $18^\circ$ -os szögek szögfüggvényértékei segítségével.
405. Táblázat használata nélkül állapítsuk meg, hogy mekkora:

$\sin 2\alpha$ ;  $\cos 2\alpha$ ;  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ;  $\operatorname{ctg} 2\alpha$ ; ha

a)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ;

c)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$ ;

b)  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ;

d)  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ .

Végül ellenőrizzük az eredményeket a táblázattal.

406. Számítsuk ki  $\operatorname{tg} 2\alpha$  értékét, ha  $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ).
407. Táblázat használata nélkül állapítsuk meg, hogy mekkora  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ;  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , ha
- a)  $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ ;
- b)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ;
- c)  $\cos \alpha = \frac{7}{16}$ ;
- d)  $\cos \alpha = 0$ ;
- e)  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .

Végül ellenőrizzük az eredményeket a táblázattal.

408. Számítsuk ki a  $36^\circ$ -os szög szögfüggvényértékeit a  $18^\circ$ -os szögre kapott szögfüggvényértékek segítségével.
409. Számítsuk ki a  $15^\circ$ -,  $22,5^\circ$ -,  $67,5^\circ$ -os s végül a  $7,5^\circ$ -os szögek szögfüggvényértékeit a  $30^\circ$ -,  $45^\circ$ -,  $135^\circ$ -os s végül a feladatban kapott  $15^\circ$ -os szögek szögfüggvényértékei segítségével.
410. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket azáltal, hogy a  $2x$ -nek függvényeit  $x$  függvényeivel helyettesítjük:

a)  $\frac{\sin 2x}{2\sin x} =$

b)  $\cos 2x + 2\sin^2 x =$

c)  $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x =$

d)  $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \cos x =$

$$e) \frac{\sin x - \sin^3 x}{\sin 2x} =$$

$$f) \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\sin^2 2x} =$$

$$g) (\cos x + \sin x + 1) \cdot (\cos x + \sin x - 1) - \sin 2x =$$

$$h) \frac{(2 + \sin 2x) \cdot (\sin x - \cos x) + (2 - \sin 2x) \cdot (\sin x + \cos x)}{(2 + \sin 2x) \cdot (\sin x - \cos x) - (2 - \sin 2x) \cdot (\sin x + \cos x)} =$$

411. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket azáltal, hogy az  $x$ -nek függvényeit az  $\frac{x}{2}$  függvényeivel helyettesítjük s a  $2x$  függvényeit  $x$  függvényeivel:

$$a) \frac{\sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x}{1 + \cos x} =$$

$$c) \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} =$$

$$b) \frac{\cos 2x - 2 \cos x + 1}{\cos 2x + 2 \cos x + 1} =$$

$$d) \frac{2 \sin x + \sin 2x}{1 - \cos 2x} =$$

412. Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \sin x \cong \frac{3}{4} - \frac{\cos 2x}{4};$$

$$b) \cos x \cong \frac{3}{4} + \frac{\cos 2x}{4}.$$

413. Fejezzük ki  $\alpha$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$  szögfüggvényeivel a következő kifejezéseket:

$$a) \sin(\alpha + \beta + \gamma); \quad b) \cos(\alpha + \beta + \gamma); \quad c) \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma).$$

414. Fejezzük ki  $\alpha$  szögfüggvényeivel:

$$a) \sin 3\alpha;$$

$$f) \sin 6\alpha;$$

$$j) \sin 5\alpha;$$

$$b) \cos 3\alpha;$$

$$g) \cos 6\alpha;$$

$$k) \cos 5\alpha;$$

$$c) \operatorname{tg} 3\alpha;$$

$$h) \sin 8\alpha;$$

$$l) \sin 10\alpha;$$

$$d) \sin 4\alpha;$$

$$i) \cos 8\alpha;$$

$$m) \cos 10\alpha$$

$$e) \cos 4\alpha;$$

szögfüggvényeket!

415. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket, felhasználva az előző feladat eredményeit:

$$a) \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{2 \cdot \cos^3 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \text{---}$$

$$b) \frac{\cos 3\alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \text{---}$$

$$e) \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha} = \text{---}$$

$$d) \frac{\sin 3\alpha + 4 \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - 4 \cos^3 \alpha} = \text{---}$$

- e)  $\frac{\sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha}{2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha} =$
- f)  $\frac{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha}{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha} =$
- g)  $\sin 3\alpha - \cos 3\alpha + (\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (1 - 2 \sin 2\alpha) =$
- h)  $\cos(30^\circ + \alpha) \cdot \cos(30^\circ - \alpha) - \frac{\sin 3\alpha}{4 \sin \alpha} =$
- i)  $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha} =$
- j)  $\sin 3\alpha \cdot \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha =$

416. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

- a)  $\frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha} = 2;$
- b)  $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha} = 2;$
- c)  $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha};$
- d)  $\frac{4 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin 3\alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha};$
- e)  $\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$

417. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

- a)  $\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos \beta;$
- b)  $\cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta;$
- c)  $\sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos \beta;$
- d)  $\cos \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) - \sin \alpha \cdot \cos(\alpha - \beta) = -\sin \beta;$
- e)  $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \beta + \cos \beta);$
- f)  $\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\cos \beta - \sin \beta);$
- g)  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$  vagy  
 $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha;$
- h)  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta;$
- i)  $\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \cos \beta;$
- j)  $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta;$
- k)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha;$
- l)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha;$
- m)  $\sqrt{(1 + \sin \alpha) \cdot (1 - \sin \alpha)} = \pm \cos \alpha;$
- n)  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha;$
- o)  $\left( \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 1 + \sin \alpha.$

418. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

- a)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$
- b)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha =$
- c)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$
- d)  $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha =$
- e)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha =$
- f)  $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha =$

419. Bizonyítsuk be, hogy

$\cos^2(\alpha+x) + \cos^2 x - 2 \cos \alpha \cos x \cos(\alpha+x)$  kifejezés független  $x$ -től.

420. Igazoljuk, hogy

a)  $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2};$

b)  $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (= \sin 45^\circ);$

c)  $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4;$

d)  $\operatorname{tg} 135^\circ + (1 - \cos 15^\circ) \cdot (1 + \sin 75^\circ) + \operatorname{ctg} 45^\circ + \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ = 1;$

e)  $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2};$

f)  $\sin 18^\circ \cdot \sin 234^\circ = -\frac{1}{4};$

g)  $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha = \frac{1}{2},$  ha  $\alpha = 20^\circ;$

h)  $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = -\frac{1}{2},$  ha  $\alpha = 20^\circ;$

i)  $\cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cos 4\alpha = \frac{1}{2},$  ha  $\alpha = 20^\circ;$

j)  $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2};$

k)  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2};$

l)  $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{1}{2};$

m)  $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2};$

n)  $\cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{2};$

$\approx$  o)  $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 3;$

p)  $\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^7;$

- r)  $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4$ ;  
 s)  $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ = 2 \cdot \cos 15^\circ$ ;  
 t)  $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  
 u)  $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$ ;  
 v)  $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$ ;  
 w)  $(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1)^3 + 27 \sin^6 \alpha \cdot \cos^6 \alpha = 0$ ;  
 z)  $2 \cdot (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3 \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0$ .

421. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  természetes szám és  $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$ , akkor:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \dots \cos n\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

422. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  természetes szám és  $\alpha = \frac{\pi}{2n}$ , akkor:

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin (2n-1)\alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

423. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{n\alpha}{2}.$$

424. Mely  $\alpha$  hegyesszögre lesz:

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 7?$$

425. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

$$a) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = 0;$$

$$b) \sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2 \beta + 2 \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha;$$

$$c) \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$d) \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$e) \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$f) 2 \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \sin 2\alpha;$$

$$g) 2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sin 2\alpha;$$

$$h) \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha \text{ és } \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha;$$

$$i) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha \text{ és } \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} = \cos 2\alpha;$$

$$j) \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$k) \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$l) \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$m) \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha};$$

$$n) \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha;$$

$$o) 2 \cdot \cos^2 (45^\circ + \alpha) = 1 - \sin 2\alpha;$$

$$p) (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cdot \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$r) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \cdot \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$s) \operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos 2\alpha;$$

$$t) \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

426. Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \sin 3\alpha = 4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right);$$

$$b) \cos 3\alpha = 4 \cdot \cos \alpha \cos \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \cos \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right).$$

427. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 360^\circ$  ( $k$  egész szám), akkor

$$\operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$



428. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\sin \alpha \neq -1$ , akkor:

$$\operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

429. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\sin \alpha \neq -1$ , akkor

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

430. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\alpha \neq 90 + k \cdot 180^\circ$ , akkor

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = 1.$$

431. Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{ha } \alpha \neq k \cdot 90^\circ;$$

$$b) \frac{1}{\sin \alpha} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{ha } \alpha \neq k \cdot 180^\circ;$$

$$c) 8 \cdot \cos^4 \alpha - 5 \cdot \cos^2 \alpha + 2 - 2 \sin^2 \alpha + 3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 5 \cos^4 \alpha;$$

$$d) \cos \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

432. Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta;$$

$$b) \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta};$$

$$c) \operatorname{ctg}^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta};$$

$$d) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$e) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$f) \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$g) \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$h) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}.$$

433. Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \cos \frac{\alpha}{3} + \cos \frac{\alpha+2\pi}{3} + \cos \frac{\alpha+4\pi}{3} = 0;$$

$$b) \cos \frac{\alpha}{3} \cdot \cos \frac{\alpha+2\pi}{3} + \cos \frac{\alpha+2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\alpha+4\pi}{3} + \cos \frac{\alpha+4\pi}{3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3} = -\frac{3}{4};$$

$$c) \cos \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\alpha+2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\alpha+4\pi}{3} = \frac{\cos \alpha}{4}.$$

434. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , akkor:

$$a) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$b) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$c) \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma;$$

$$d) \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - 1;$$

$$e) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma;$$

$$f) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = 1;$$

$$g) \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2};$$

$$h) t = s^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \text{ ha } t \text{ háromszög területe, } s = \text{ a háromszög félkerülete};$$

$$i) r = \frac{s}{4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}, \text{ ha } r = \text{ a háromszög köré írt kör sugara};$$

$$j) t = 2r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma;$$

$$k) \rho = 4r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}, \text{ ha } \rho \text{ a háromszögbe írt kör sugara};$$

$$l) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma;$$

$$m) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$n) d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = 4 \cdot \rho^2 \cdot r, \text{ ha } \rho \text{ a háromszögbe írt kör sugara; } r \text{ a háromszög köré írt kör sugara; } d_1, d_2, d_3, \text{ a beírt kör középpontjának távolsága a csúcsoktól.}$$

435. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben:

$$a) \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}} \quad (\text{tangenstétel});$$

$$b) \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}};$$

$$c) \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

## SZÖVEGES FELADATOK HÁROMSZÖGEKRE, NÉGYSZÖGEKRE, SOKSZÖGEKRE AZ ADDÍCIÓS TÉTELEK ALAPJÁN

436. Bizonyítsuk be a következő tételt: Ha  $c$  a derékszögű háromszög átfogója,  $a$  és  $b$  pedig a befogói, akkor  $c^2$ ,  $2ab$  és  $b^2 - a^2$  szintén derékszögű háromszög oldalainak mértékszámait, s ennek egyik hegyesszöge az eredeti háromszög kisebbik hegyesszögének kétszerese.
437. Bebizonyítandó, hogy bármely derékszögű háromszögben  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b+c}$  ( $c$  az átfogó). Fejezzük ki  $\frac{\alpha}{2}$  minden szögfüggvényértékét a  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  segítségével.
438. Valamely derékszögű háromszögben az átfogó és az egyik befogó összege:  $c+b = 14$  cm;  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ , ahol  $\alpha$  az  $a$  befogóval szemközti szög. Számítsuk ki a háromszög oldalainak mértékszámát trigonometriai táblák felhasználása nélkül.
439. Egy derékszögű háromszögben adott a derékszög felezője:  $f$ , és az  $\alpha$  hegyesszög. Fejezzük ki a háromszög oldalait és területét a megadott alkotórészekkel, és állapítsuk meg, mikor lesz a háromszög területe a legkisebb.
440. Egy háromszögnek adott két oldala, és tudjuk, hogy a szögek aránya 1:2. Mekkora a háromszög szögei és az ismeretlen harmadik oldala?  
a)  $a = 5$  cm;  $b = 4$  cm;    b)  $a = 7$  cm;  $b = 4$  cm.
441. Egy háromszög két oldala 3 és 4 cm, az általuk közbezárt szög  $60^\circ$ . Mekkora a háromszög ismeretlen szögei?
442. Egy háromszög két oldala 10 cm és 5 cm; az általuk bezárt szög kétszerese a rövidebbik oldallal szemben fekvő szögnek. Mekkora a háromszög szögei?
443. Egy háromszög két oldalának összege 132,7 cm, a harmadik oldalon fekvő szögek  $27^\circ 45'$  és  $72^\circ 17'$  nagyságúak. Mekkora a háromszög oldalai?
444. Egy háromszög köré írt kör sugara 5 cm, egyik oldala 7 cm és a másik két oldal aránya 5:3. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
445. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit, ha adott  $a$ ,  $\alpha$  és  $m_b : m_c = k$ !  
Számítsuk ki a feladatot, ha  $a = 260$  cm;  $\alpha = 67^\circ 23'$  és  $m_b : m_c = 21:13$ .
446. Egy háromszögben két oldal aránya 1:2; az általuk bezárt szög  $40^\circ$ , a harmadik oldal 15 cm. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

447. Egy háromszög szögei tangenseinek aránya 1:2:3. Mi az oldalak aránya?
448. Mekkora a háromszög ismeretlen szögei és oldalai, ha tudjuk, hogy  $a:b = 1:2$ ;  $\alpha:\beta = 1:3$  és  $c = 5$  cm?
449. Egy háromszög két oldala 15 cm és 9 cm hosszú. A nagyobbik oldallal szemközti szög háromszor akkora, mint a kisebbik oldallal szemközti szög.
- a) Mekkora a háromszög szögei és a harmadik oldal?  
 b) Mekkora a háromszögbe írható kör sugara?
450. Egy síktükörtől az  $A$  pont 4, a  $B$  pont 9 m-re s a két pont egymástól 20 m-re van. Mekkora beesési szöggel esik a tükörrre az  $A$  pontból kiinduló fénysugár, ha a  $B$  pontba verődik vissza?
451. Egy egyenlő szárú trapézban a két párhuzamos oldal:  $2a$  és  $2b$  hosszú. A hosszabbik párhuzamos oldal egyik végpontjából a rövidebbik párhuzamos oldal  $\alpha$  szög alatt látszik. Mekkora a trapéz területe?  
 Számítsuk ki a feladatot, ha  $2a = 26$  cm;  $2b = 16$  cm;  $\alpha = 36^\circ 30'$ .
452.  $P$  pont helyzetét kell az 1:1 250 000 méretű térképen három ponthoz, az úgynevezett háromszögelési pontokhoz viszonyítva meghatározni. A lemért látószögek:  $APB$  szög =  $83^\circ$ ,  $APC$  szög =  $130^\circ$ ,  $BAC$  szög =  $65^\circ$ . A lemért távolságok:  $AB = 17,2$  cm és  $AC = 20$  cm. Milyen távolságra van  $P$  pont az  $A$  ponttól a valóságban?  
 ( $A =$  Szeged;  $B =$  Miskolc;  $C =$  Győr;  $P =$  Budapest.)
453. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal:  $APB$  szög =  $52^\circ$ ;  $APC$  szög =  $23^\circ$ ;  $\alpha = 105^\circ$ ;  $AB = 15$  cm;  $AC = 8$  cm. Mekkora az  $AP$  távolság a valóságban?
454. Egy négyszög oldalai:  $AB = 4$  cm,  $AD = 5$  cm;  $BAD$  szög =  $110^\circ 15'$ . Az  $A$  csúcshól húzott átló a  $C$  csúcshól levő szöget két részre bontja:  $BCA$  szög =  $29,3^\circ$ ,  $ACD$  szög =  $35^\circ 45'$ . Mekkora az  $AC$  átló?
455. Az  $ABCD$  négyszögben adott  $AB$  és  $AD$  oldal, valamint az  $\alpha$  szög és  $\beta = \delta = 90^\circ$ . Mekkora az  $AC$  átló hossza?  
 Számítsuk ki a feladatot, ha  $AB = 10$  cm,  $AD = 20$  cm és  $\alpha = 72^\circ$ .
456. Milyen messze van a derékszög csúcsától az egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az a belső  $P$  pontja, amelyből az egyik befogó  $90^\circ$ -os, a másik befogó  $120^\circ$ -os szög alatt látszik?
457. Egy háromszög alapját a hozzá tartozó magasság egy 9 és egy 4 cm-es darabra bontja. A háromszögnek az alap 4 cm-es darabja mellett levő szöge kétszerese a 9 cm-es darabon fekvő szögnek. Mekkora a háromszög szögei, és mekkora az alaphoz tartozó magasság?
458. Egy négyzet alapú egyenlő oldalélű gúla oldaléle  $o$ , az oldalél az alap síkjával  $\alpha$  szöget zár be. Mekkora a test térfogata?
459. Határozzuk meg az egyenes körkúpba írt gömb térfogatát és a kúp-palástot érintő kör sugarát, ha adott a kúp alkotója és az a szög, amelyet az alkotó az alapkör síkjával zár be.
460. Egyenes hasáb alapja egyenlő szárú háromszög. Mekkora a hasáb térfogata, ha adott az egyenlő szárú háromszög alapja:  $a$ , a szárak és az alap által bezárt  $\alpha$  szög, és tudjuk, hogy a palást területe egyenlő az alaplappok területének összegével.
461. Szabályos háromoldalú gúla alapéle  $a$ , oldallapja az alaplappal  $\alpha$  szöget zár be. Mekkora a gúla felszíne és térfogata?
462. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  egy háromszög szögei, és  $\sin \gamma - \cos \alpha = -\cos \beta$ , akkor a háromszög derékszögű.

463. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben  $\operatorname{tg} \beta \cdot \sin^2 \gamma = \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin^2 \beta$ , akkor a háromszög vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.

464. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben

$$a \cdot \operatorname{tg} \alpha + b \cdot \operatorname{tg} \beta = (a+b) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2},$$

akkor a háromszög egyenlő szárú.

465. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\alpha, \beta, \gamma$  egy háromszög szögei,

$$\text{és } \sin \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}, \text{ akkor a háromszög derékszögű.}$$

466. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben  $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 2 \cos \alpha$ , akkor a háromszög egyenlő szárú.

467. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben

$$\frac{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2},$$

akkor a háromszög egyenlő szárú.

468. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben  $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{1}{8}$ , akkor a háromszög egyenlő oldalú.

469. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben

$$\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b+c-a} = a^2 \text{ és } \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{3}{4},$$

akkor a háromszög egyenlő oldalú.

470. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben  $\alpha = 120^\circ$ , akkor az oldalakra nézve fennáll:

$$b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2).$$

471. Bizonyítsuk be, hogy az összes olyan háromszögek közül, amelyeknek egyenlő a kerülete és egyenlő a  $\gamma$  szögük, annak lesz a legkisebb a  $c$  oldala, amelyben  $\alpha = \beta$ , azaz a háromszög egyenlő szárú.

472. Adott egy háromszög egyik szöge,  $\alpha$  a szemközt fekvő oldal  $a$  és a másik két oldal különbsége:  $b - c = d$ . Mekkora a háromszög területe?

473. Egy kör  $60^\circ$ -os középponti szögét osszuk fel két részre úgy, hogy a részszőgekhez tartozó húrok aránya: 5:2 legyen.

474.  $60^\circ$ -os szög egyik szárán  $A$  pont 16,  $B$  pont 25 cm-nyire van a szög csúcsától. Mekkora annak a körnek a sugara, amely az  $A$  és  $B$  pontokon megy át, és a szög másik szárát érinti?

475. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{A_{2n}} = \frac{1}{A_n} + \frac{1}{a_n}, \text{ ha ugyanarra a körre vonatkozólag } a_n \text{ a beírt } n \text{ oldalú, } A_n \text{ a körülírt } n \text{ oldalú és } A_{2n} \text{ a körülírt } 2n \text{ oldalú szabályos sokszög oldalát jelenti.}$$

476. Egy szabályos hétszög átlói  $b$  és  $c$ , egyik oldala  $a$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

477. Számítsuk ki a szabályos ötágú csillag területét, ha ismerjük két szomszédos külső csúcspont összekötő egyenesének távolságát az ettől az egyenestől legtávolabb fekvő csúcsponttól.
478. Egy háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak, melynek különbsége 1. A legkisebb szöge fele a legnagyobbak. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
479. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben  $\frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\beta}{2}$ ,  $\frac{\gamma}{2}$  szögek cotangensei számtani sorozatot alkotnak, akkor

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 3.$$

480. Bizonyítsuk be, hogy minden húrnégyszögben

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}, \text{ ahol } \alpha \text{ az } a \text{ és } d \text{ oldalak által bezárt szög, és}$$

$$a+b+c+d = 2s.$$

481. Egy húrnégyszög oldalai:  $a, b, c, d$ .

- a) Mekkora a négyszög átlói?  
 b) Mekkora a négyszög területe?  
 c) Mekkora a körülírt kör sugara?

482. Egy húrnégyszög oldalai: 41, 45, 22 és 31 cm hosszúak. Mekkora a területe?

483. Egy húrnégyszög oldalai: 13, 14, 16, 10 dm hosszúak. Mekkora az átlói és a köré írt kör sugara?

484. Egy húrnégyszög három egymás utáni oldala  $a = 15$ ,  $b = 18$  és  $c = 20$  m,  $BD$  átlója 23 m. Mekkora a szögei és az ismeretlen oldala?

485. Egy négyszögben  $a:b:c:d = 9:8:7:6$ . Az  $a$  és  $d$  oldalak által bezárt szög  $\alpha = 72,6^\circ$  és a négyszög területe  $225 \text{ cm}^2$ . Mekkora a négyszög oldalai és ismeretlen szögei?

## A SINUS- ÉS COSINUSFÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA ÉS NÉHÁNY TRANSZFORMÁCIÓJUK

486. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket a  $[0, 2\pi]$  intervallumban:

a)  $y = \sin x$ ;  $y = 3 \sin x$ ;  $y = \frac{1}{2} \sin x$ ;

b)  $y = \cos x$ ;  $y = 2 \cos x$ ;  $y = \frac{1}{3} \cos x$ ;

c)  $y = -\sin x$ ;  $y = -3 \sin x$ ;  $y = -\frac{1}{2} \sin x$ ;

d)  $y = -\cos x$ ;  $y = -2 \cos x$ ;  $y = -\frac{1}{3} \cos x$ ;

- e)  $y = \sin x + 2$ ;  $y = \sin x - 3$ ;  $y = 2 \sin x + 3$ ;
- f)  $y = -\sin x + 3$ ;  $y = -\frac{1}{2} \sin x + 2$ ;  $y = -3 \sin x - 1$ ;
- g)  $y = \cos x + \frac{1}{2}$ ;  $y = \cos x - 3$ ;  $y = 3 \cos x - 2$ ;
- h)  $y = -\cos x - 2$ ;  $y = -\frac{1}{3} \cos x + 3$ ;  $y = -2 \cos x + 1$ ;
- i)  $y = \sin 2x$ ;  $y = \sin \frac{1}{2}x$ ;  $y = \sin \frac{1}{4}x$ ;
- j)  $y = \cos 3x$ ;  $y = \cos \frac{1}{3}x$ ;  $y = \cos 2x$ ;
- k)  $y = \sin(-x)$ ;  $y = \sin(-2x)$ ;  $y = \sin\left(-\frac{1}{3}x\right)$ ;
- l)  $y = \cos(-x)$ ;  $y = \cos(-3x)$ ;  $y = \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$ ;
- m)  $y = \sin(x + \pi)$ ;  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ;  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ;
- n)  $y = \sin(\pi - x)$ ;  $y = \sin(x + 1)$ ;  $y = \sin(x - 1)$ ;
- o)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ;  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ;  $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ;
- p)  $y = \operatorname{tg} x$ ;  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;  $y = -\operatorname{tg} x$ ;
- r)  $y = |\sin x|$ ;  $y = |\cos x|$ ;
- s)  $y = [\sin x]$ ;  $y = [\cos x]$ ;
- t)  $y = [|\sin x|]$ ;  $y = [|\cos x|]$ .

487. Az alapfüggvény lineáris transzformációjával ábrázoljuk a következő függvényeket a  $[0, 2\pi]$  intervallumban:

- a)  $y = -3 \sin x + 4$ ;
- b)  $y = -\frac{1}{2} \cos x - 3$ ;
- c)  $y = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right)$ ;
- d)  $y = \cos(-3x - \pi)$ ;
- e)  $y = -2 \sin(\pi - 2x) + 1$ ;
- f)  $y = -3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2$ ;

$$g) y = \sqrt{2} \cdot \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$h) y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$i) y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

488. Grafikus összegezéssel ábrázoljuk a következő függvényeket a  $[0, 2\pi]$  intervallumban:

$$a) y = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$b) y = \sin x - \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$c) y = 2 \cos x + \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$d) y = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$e) y = \sin x + 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$f) y = 2 \sin \frac{x}{2} + \cos x;$$

$$g) y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

489. A szögfüggvények összegére és különbségére kapott azonosságok alapján hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi függvényeket, s azután ábrázoljuk is ezeket:

$$a) y = \sin x + \sin \left( \frac{\pi}{3} + x \right);$$

$$b) y = \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$c) y = \cos \left( \frac{\pi}{2} + x \right) + \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right).$$

490. Állapítsuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, majd vizsgáljuk meg a függvények menetét. Ennek alapján vázoljuk fel a függvénygörbét.

$$a) y = \sin x + \cos x;$$

$$b) y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x;$$

$$c) y = 2^{\sin x};$$

$$d) y = 2^{\cos x};$$



- e)  $y = \sqrt{1 - \sin x}$ ;  
 f)  $y = \sqrt{1 - \cos x}$ ;  
 g)  $y = \log_a \sin x$ , illetve  $y = \lg \sin x$ ;  
 h)  $y = \sqrt{\log_a \sin x}$ , illetve  $y = \sqrt{\lg \sin x}$ ;  
 i)  $y = \sin(\sin x)$ ;  
 j)  $y = \cos(\cos x)$ ;  
 k)  $y = \frac{\sin x}{x}$ ;  
 l)  $y = \frac{\cos x}{x}$ ;  
 m)  $y = \sin x^2$ ;  
 n)  $y = x \cdot \sin x$ ;  
 o)  $y = x^2 \cdot \sin x$ ;  
 p)  $y = x^2 |\sin x|$ .

**491.** Vizsgáljuk a következő függvényeket differenciálhányadosuk 0 helyein, azok környezetében. Készítsünk értéktáblázatot, állapítsuk meg a helyi maximum és minimum értékeit. Végül vázoljuk a függvényeket!

a)  $y = \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin x \cdot \cos x$ ;

b)  $y = 6 \sin x - 3 \cos 2x + 2 \sin 3x$ ;

c)  $y = 2 \sin x + \cos 2x$ .

**492.** Mozogjon egy  $P$  pont az  $AB = 2r$  átmérőjű félkörön. Húzzunk merőlegest  $P$  pontból az átmérőre és az átmérő  $A$  végpontjában húzott érintőre. Számítsuk ki az így keletkezett téglalap területét, mint a  $PAB$  szög ( $x$ ) függvényét!

$P$  pont milyen helyzetében lesz a téglalap területe maximális?

**493.** Az  $r$  sugarú gömb köré írható egyenes kúpok közül melyiknek a térfogata a legkisebb?

**494.** Mozogjon egy  $P$  pont az  $AB = 2r$  átmérőjű félkörön. Kössük össze a  $P$  pontot a félkör középpontjával ( $O$ ) és  $A$ -val. Szerkesszünk  $AP$ -re egyenlő oldalú háromszöget (kifelé).

a) Számítsuk ki az  $AOPC$  négyszög területét, mint a  $PAB$  szög ( $x$ ) függvényét!  $C$  az egyenlő oldalú háromszög harmadik csúcsa.

b) Mekkora  $x$  értéke, ha a négyszög területe  $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$ ?

**495.** Oldjuk meg grafikus úton a következő trigonometrikus egyenleteket:

a)  $\sin x = \frac{1}{2}$ ;

b)  $\cos x = 0,5$ ;

c)  $\sin 2x = 0,5$ ;

- d)  $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$ ;  
 e)  $\operatorname{ctg} x = 2 \cos x$ .

496. Egy háromszög két oldala 5 cm és 10 cm hosszú. Az általuk bezárt szög kétszer akkora, mint a kisebbik oldallal szemközti szög. Számítsuk ki grafikus úton a háromszög szögeit.
497. Egy háromszög két oldala 5 cm és 6 cm hosszú. A nagyobbik oldallal szemközti szög kétszer akkora, mint a kisebbik oldallal szemközti szög. Számítsuk ki a háromszög szögeit grafikus úton.

## TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK ÉS EGYENLETRENDSZEREK

498. Határozzuk meg  $x$ -nek azon értékeit, melyek az alábbi trigonometrikus egyenleteket elégítik ki:

- |                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| a) $\sin x = -0,66$ ;       | h) $\cos x = -0,95$ ;              |
| b) $\sin x = 0,993$ ;       | i) $3 \cos x = 2$ ;                |
| c) $7 \sin x = 3$ ;         | j) $2 \cos x = \sqrt{2}$ ;         |
| d) $2 \sin x = 1$ ;         | k) $4 \cos^2 x = 1$ ;              |
| e) $2 \sin x = -1$ ;        | l) $\operatorname{tg} x = 2,3$ ;   |
| f) $2 \sin x = -\sqrt{2}$ ; | m) $7 \operatorname{tg} x = 9$ ;   |
| g) $\cos x = 0,5$ ;         | n) $\operatorname{tg} x = -1$ ;    |
|                             | o) $\operatorname{ctg} x = -0,4$ . |

499. Határozzuk meg azon pozitív hegyesszögeket, amelyek kielégítik a következő trigonometrikus egyenleteket:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\sin 5x = \sin x$ ;                                 | g) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x$ ;                                  |
| b) $\sin 4x = \sin \frac{x}{2}$ ;                       | h) $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{12} \right)$ ; |
| c) $\sin \left( 4x + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin x$ ; | i) $\operatorname{tg} 4x = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;                       |
| d) $\cos 2x = -\cos x$ ;                                | j) $\operatorname{ctg} (3x + 20^\circ) = -\operatorname{ctg} x$ ;                  |
| e) $\cos 5x = \cos x$ ;                                 | k) $\operatorname{ctg} (5x + 20^\circ) = -\operatorname{ctg} x$ ;                  |
| f) $\cos (3x + 8^\circ) = -\cos x$ ;                    | l) $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} x$ .                                |

500. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

- a)  $\sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ ;
- b)  $\sin 3x = \cos 5x$ ;
- c)  $\operatorname{tg} \left( 3x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{ctg} (5x - \pi) = 1$ ;
- d)  $\operatorname{tg} \pi \cdot (2x + 1) - \operatorname{tg} \pi \cdot (x + 1) = 0$ ;
- e)  $\sin \left( \frac{\pi}{6} + x \right) = \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$ .

501. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

- a)  $2 \sin x = \operatorname{tg} x$ ;
- b)  $3 \sin x = 2 \operatorname{tg} x$ ;
- c)  $5 \sin x = 3 \operatorname{tg} x$ ;
- d)  $7 \cos x = 4 \operatorname{ctg} x$ ;
- e)  $\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$ .

502. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

- a)  $\sin x - \cos x = 0$ ;
- b)  $\sin x + \cos x = 0$ ;
- c)  $3 \sin x = 4 \cos x$ ;
- d)  $\sin x = 2 \cos x$ ;
- e)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ ;
- f)  $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ ;
- g)  $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ ;
- h)  $4 \cos^2 x = \sin^2 x$ ;
- i)  $\frac{1 - \sin x}{2 \cos x} = 1$ ;
- j)  $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ .

503. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

- a)  $4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$ ;
- b)  $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ ;
- c)  $2 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ ;
- d)  $4 \cos^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} = 0$ ;
- e)  $\cos^2 x - \cos x = \sin^2 x$ ;
- f)  $5(1 - \cos x) = 4 \sin x$ ;
- g)  $\frac{\sin x}{1 - \sin x} = \cos x$ ;
- h)  $4 \sin x + 3 \cos x = 2$ ;
- i)  $3 \sin x + 4 \cos x = 5$ ;
- j)  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$ ;
- k)  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ ;
- l)  $\cos x - \sin^2 x = -0,4$ ;
- m)  $\cos x = \operatorname{tg} x$ ;
- n)  $\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} = 2\sqrt{3}$ ;
- o)  $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 1,5$ .

504. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a)  $4 \cos x = \operatorname{tg} x$ ;

b)  $16 \operatorname{tg} x = 15 \cos x$ ;

c)  $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x - 1 = 0$ ;

d)  $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ ;

e)  $5 \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x = 11$ ;

f)  $\operatorname{tg}^2 x - 5 = \frac{1}{\cos x}$ ;

g)  $\operatorname{tg}^2 x + 17 = \frac{10}{\cos x}$ ;

h)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$ ;

i)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$ ;

j)  $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + 2 = 0$ ;

k)  $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3 = 0$ ;

l)  $\operatorname{tg}^4 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$ ;

m)  $\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{3}{4} \sin^2 2x = 0$ ;

n)  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$ ;

o)  $4 \cos^4 x = \cos 2x + \sin^2 2x$ ;

p)  $5 \cos^2 x + \cos^2 2x = 4$ ;

r)  $3 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x = 16$ .

505. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a)  $\sin(60^\circ - x) = 2 \sin x$ ;

b)  $\cos(30^\circ - x) = 3 \sin x$ ;

c)  $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ;

d)  $\operatorname{tg}(a+x) \cdot \operatorname{tg}(a-x) = \frac{1-2 \cos 2a}{1+2 \cos 2a}$ ;

e)  $\cos 2x = \sin x$ ;

f)  $\sin 2x + \cos^2 x = 1$ ;

g)  $4 \cos x = \frac{1}{\sin x}$ ;

h)  $\sin 2x - \cos x = 0$ ;

i)  $3 \sin 2x = 2 \cos x$ ;

j)  $\sin 2x = 2 \sin x$ ;

k)  $\sin x = \frac{\cos 2x}{2}$ .

506. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

a)  $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ ;

b)  $\cos 2x + \sin 2x = -1$ ;

- c)  $4 \sin^2 x + \cos^2 2x - 1 = 0$ ;  
 d)  $12 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 3 \cos 2x$ ;  
 e)  $3 \sin^2 x - 4 \cos^2 x = \frac{\sin 2x}{2}$ ;  
 f)  $9 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos x = 4$ ;  
 g)  $\sin 2x \cdot (\sin x - 1) = \cos x (\sin x + 2)$ ;  
 h)  $8 \sin^2 x + 4 \sin 2x + 5 \cos 2x = 8$ ;  
 i)  $4 \sin x \cos x - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0$ .

507. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

- a)  $2 \sin 2x = \operatorname{tg} x$ ;  
 b)  $\sin 2x = \operatorname{tg} x$ ;  
 c)  $\sin x + \cos x = 1,2$ ;  
 d)  $\sin x + \cos x = 1$ ;  
 e)  $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ;  
 f)  $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ ;  
 g)  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$ ;  
 h)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$ .

508. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

- a)  $\sin 2x = \cos 3x$ ;  
 b)  $\sin 4x + \sin x = 0$ ;  
 c)  $\cos 3x + 2 \cos x = 0$ ;  
 d)  $\sin 4x - \sin 2x = \sin x$ ;  
 e)  $\sin 2x + \sin 3x = 3 \sin x$ ;  
 f)  $\sin 3x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$ ;  
 g)  $\sin 4x + \sin 2x = \sin 3x$ ;  
 h)  $\cos 5x + \cos 3x = \cos 6x + \cos 2x$ ;  
 i)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ ;  
 j)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ ;  
 k)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$ ;  
 l)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$ ;  
 m)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$ ;  
 n)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ ;  
 o)  $\cos 10x + \operatorname{tg}^2 5x = 2$ ;  
 p)  $\sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = \sqrt{2}$ ;  
 r)  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2 \cdot \sqrt{2}$ .

509. Oldjunk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

$$a) 16^{\sin^2 x} + 4^{1+\cos 2x} = 10;$$

$$b) \left[ (\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1-\cos 2x}{2}} \right]^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

510. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelyet  $\cos 2x$  elégít ki, ha  $x$  a  $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$  egyenlet gyöke!

511. Oldjunk meg az alábbi trigonometrikus egyenletrendszereket:

$$a) x+y = 45^\circ;$$

$$2 \operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y;$$

$$b) x+y = 120^\circ;$$

$$\sin x + \sin y = 1,5;$$

$$c) x-y = 60^\circ;$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 3;$$

$$d) x+y = 75^\circ;$$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4};$$

$$e) x+y = 90^\circ;$$

$$\cos^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{2};$$

$$f) \sin(x+y) = 0,4540;$$

$$\sin(x-y) = 0,3523;$$

$$g) \sin(x+y) = 0,5299;$$

$$\sin(x-y) = 0,9903;$$

$$h) \sin x + \sin y = \frac{7}{12};$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{12};$$

$$i) \cos x + \cos y = \frac{14}{15};$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{5};$$

$$j) \sin^2 x - \cos y = 1;$$

$$\sin^2 x + \cos y = 1;$$

$$k) \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2};$$

$$\cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2};$$

$$l) \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4};$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4};$$

$$m) \sin(x+y) = \frac{1}{2};$$

$$\sin 2x + \sin 2y = \frac{1}{2};$$

$$n) \sin x \cdot \cos y = 0;$$

$$(\sin x + \cos^2 y) \sin^2 y = \frac{1}{4};$$

$$o) \sin(x+y) = \cos(x-y);$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1;$$

$$p) 2 \cos x + \cos y = 1;$$

$$2 \sin x - \sqrt{3} \sin y = 0;$$

$$r) \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$s) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2;$$

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = 1;$$

$$t) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2;$$

$$2 \cos x \cos y = 1;$$

$$u) 9 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4;$$

$$2 \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} y = 1;$$

$$v) \cos x + \cos y = 1,94;$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 1,7661;$$

$$z) \cos x - \cos y = 0,5;$$

$$\cos 2x + \cos 2y = -1,5.$$

512. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletrendszereket:

$$a) \begin{aligned} {}^2\log y - {}^2\log x &= 1; \\ {}^2\log \cos(x+y) - {}^2\log \sin(x+y) &= -3; \end{aligned}$$

$$b) 2^{x-2} = 4^{y-1};$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} + y\right) = 1 - \cos x;$$

$$c) x^{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{8};$$

$$x^{\frac{1+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}} = 4;$$

513. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0$$

$$\sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0$$

egyenletrendszer egyenértékű az

$$1 + \cos x + \cos y = 0$$

$$\sin x + \sin y = 0$$

egyenletrendszerrel.

Határozzuk meg az utóbbi egyenletrendszer gyökeit.

514. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$a \cdot \sin^2 x + a_1 \cdot \cos^2 x = b$$

$$a_1 \cdot \sin^2 y + a \cdot \cos^2 y = b_1$$

egyenletek gyökei kielégítik az

$a \cdot \operatorname{tg} x = a_1 \cdot \operatorname{tg} y$  egyenletet, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b_1}.$$