A hiperbolikus paraboloid más megközelítésben

Ha két, egymásra merőleges kitérő egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmazát keressük, hiperbolikus paraboloidot (nyeregfelületet) kapunk.

Vegyünk fel két ilyen egyenest, e-t és f-et. Paraméteres egyenletük:

$$\left.\begin{aligned} e: x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} f: x &= 0 \\ y &= t \\ z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Ezen egyenesek irányvektorai,

$$\mathbf{v_e}(1;0;0), \qquad \text{illetve} \qquad \mathbf{v_f}(0;1;0),$$

valamint egy pontja

$$O(1;0;0), \qquad \text{illetve} \qquad T(0;1;0).$$

Legyen a pont, melynek a távolságát az egyenesektől vizsgáljuk $P(x;y;z)$. Ekkor

$$\overrightarrow{OP}(x;y;z), \qquad \text{illetve} \qquad \overrightarrow{TP}(x;y;z-5).$$

A keresett távolságok:

$$d(P;e) = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \times \mathbf{v_e}\right|}{|\mathbf{v_e}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = |[0;z;y]| = \sqrt{x^2+y^2},$$

illetve

$$d(P;f) = \frac{\left|\overrightarrow{TP} \times \mathbf{v_f}\right|}{|\mathbf{v_f}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z-5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = |[z-5;0;x]| = \sqrt{(z-5)^2+x^2}.$$

A két távolság egyenlő:

$$z^2 + y^2 = z^2 - 10z + 25 + x^2,$$

s innen a keresett felület egyenlete:

$$z = \frac{x^2 - y^2 + 25}{10}$$
